

Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung

von

Dr. Heinrich Wieleitner



Sammlung Schubert

Sammlung mathematischer Lehrbücher.

Verzeichnis der erschienenen und projektierten Bände.

Erschienen sind bis Herbst 1905:

Band I: **Elementare Arithmetik und Algebra** von Professor Dr. Hermann Schubert in Hamburg. M. 2.80.

„ II: **Elementare Planimetrie** von Prof. W. Pflieger in Münster i. E. M. 4.80.

„ III: **Ebene und sphärische Trigonometrie** von Dr. F. Bohnert in Hamburg. M. 2.—.

„ IV: **Elementare Stereometrie** von Dr. F. Bohnert in Hamburg. M. 2.40.

„ V: **Niedere Analysis I. Teil: Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kettenbrüche und diophantische Gleichungen** von Prof. Dr. Hermann Schubert in Hamburg. M. 3.60.

„ VI: **Algebra mit Einschluß der elementaren Zahlentheorie** von Dr. Otto Pund in Altona. M. 4.40.

„ VII: **Ebene Geometrie der Lage** von Prof. Dr. Rud. Böger in Hamburg. M. 5.—.

„ VIII: **Analytische Geometrie der Ebene** von Prof. Dr. Max Simon in Straßburg. M. 6.—.

„ IX: **Analyt. Geometrie d. Raumes I. Teil: Gerade, Ebene, Kugel** von Prof. Dr. Max Simon in Straßburg. M. 4.—.

„ X: **Differential- und Integralrechnung I. Teil: Differentialrechnung** von Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg. M. 9.—.

„ XI: **Differential- und Integralrechnung II. Teil: Integralrechnung** von Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg. M. 10.—.

„ XII: **Darstellende Geometrie I. Teil: Elemente der darstellenden Geometrie** von Dr. John Schröder in Hamburg. M. 5.—.

„ XIII: **Differentialgleichungen** von Prof. Dr. L. Schlesinger in Klausenburg. 2. Aufl. M. 8.—.

„ XIV: **Praxis der Gleichungen** von Prof. Dr. C. Runge in Hannover. M. 5.20.

„ XIX: **Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung** von Dr. Norbert Herz in Wien. M. 8.—.

„ XX: **Versicherungsmathematik** von Dr. W. Großmann in Wien. M. 5.—.

„ XXV: **Analytische Geometrie des Raumes II. Teil: Die Flächen zweiten Grades** von Prof. Dr. Max Simon in Straßburg. M. 4.40.

„ XXVII: **Geometr. Transformationen I. Teil: Die projektiven Transformationen nebst ihren Anwendungen** von Prof. Dr. Karl Doehlemann in München. M. 10.—.

Sammlung Schubert XLIII

Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung

von

Dr. Heinrich Wieleitner
Gymnasiallehrer am hum. Gymnasium Speyer

Mit 82 Figuren im Text

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1905

Spamersche Buchdruckerei, Leipzig.

VORWORT.

Unsere Lehrbücher über höhere Gegenstände der Mathematik laufen Gefahr immer dickere, für einen Studenten unübersichtliche, kaum zu bewältigende Kompendien zu werden — von Gelehrten für Gelehrte geschriebene Bücher. Das vorliegende Buch ist keines von diesen beiden. Der Verfasser suchte nicht die Wissenschaft mit neuen Tatsachen zu bereichern; auch die ganze Anordnung und Darstellung macht nicht Anspruch auf Einheitlichkeit und absolute Strenge, wie dies eine eigentliche »Theorie« erfordern würde. Das Ganze soll nur eine Einführung sein, wenn dies auch im Titel nicht ausdrücklich hervorgehoben wurde, eine Einführung möglichst im Geiste des SCHUBERTschen Unternehmens. Für Anfänger ist das Buch berechnet. Anfänger freilich nicht in dem Sinne, daß überhaupt keine Vorkenntnisse nötig wären. Diese sind nur möglichst reduziert. Bei noch weiterer Reduktion dürfte es schwerlich mehr möglich sein eine vorwiegend analytische Theorie der algebraischen Kurven abzufassen. Wir erwarten von dem Leser die Kenntnis der Anfangsgründe der Differentialrechnung und Algebra mit Einschluß der Determinanten; besonders aber wäre eine etwas größere Vertrautheit mit der Theorie der Kegelschnitte wünschenswert. Denn die Theorie der höheren Kurven ist ja hiervon eigentlich nur die Fortsetzung. Es wurden auch überall, wo es anging, Beispiele aus der Theorie der Kegelschnitte gegeben.

Was den behandelten Stoff betrifft, so steht das Buch dem von SALMON-FIEDLER am nächsten. Doch habe ich mich bemüht, überall das in den letzten 20 Jahren neu Hinzugekommene, soweit es der Raum gestattete, mit zu verarbeiten. Ich verweise nur auf das CZUBERsche Verfahren zur Enveloppenbestimmung (§ 12), den Abschnitt VI über Kurvendiskussion, Abschnitt VII über höhere Singularitäten (wozu noch die §§ 41—43 gehören) und Abschnitt X, wo versucht wurde die einfachsten Sätze über Punktgruppen mit den bekannten älteren Schnittpunktsätzen gemeinsam darzustellen. Auch der Abschnitt XII über Kurven dritter Ordnung wird vielleicht in einzelnen Partieen auch bei Fachmännern Interesse erwecken können. Ich glaube es ist mir gelungen die verwickelt scheinenden Beziehungen zwischen der Grundkurve, der HESSEschen, CAYLEYschen und der Fundamentalkurve dritter Klasse mit möglichst einfachen Mitteln präzis darzustellen. Dabei wurde auch ein Irrtum SCHRÖTERS richtig gestellt (s. S. 234). Die ebenfalls neue KÖLMEL-WIENERsche Einteilung der Kubiken bildet den Schluß dieses Abschnitts. Über spezielle Kurven wurde soviel gegeben als möglich. Bezüglich alles weiteren muß einstweilen auf das Fundamentalwerk von G. LORIA verwiesen werden. Ich beabsichtige aber selbst noch für die »Sammlung Schubert« einen Band über spezielle, auch transzendente Kurven abzufassen.

Dem Zweck des Buches entsprechend, habe ich viele und möglichst genaue Literaturangaben gemacht. Das bedarf fast einer Entschuldigung. Aber, selbst nicht am Sitze einer größeren Bibliothek, habe ich es schon oft genug schmerzlich empfunden, wenn ein großes Lehrbuch, das ich mir verschaffte, bezüglich der Literatur auf ein anderes, oder gar auf ein — von auswärts selten zu erlangendes — bibliographisches Nachschlagewerk verwies. Ich will den Leser direkt mit der Literatur in Beziehung setzen. Für das letzte

Jahrzehnt habe ich selbst eine vollständige Zusammenstellung der einschlägigen Literatur herausgegeben (s. das Literaturverzeichnis auf S. XXI).

All denen einzeln zu danken, die mich durch Übersendung von Arbeiten oder sonst unterstützt haben, ist unmöglich. Ich bedaure nur, daß ich vieles unbenutzt, ja unerwähnt lassen mußte. Besonderen Dank aber schulde ich meinem verehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. DOEHLEMANN, der sich die Mühe nahm mein ganzes Manuskript durchzusehen und mir mehrere wertvolle Ratschläge erteilte; ebenso Herrn Kollegen Dr. HALLER, der ebenfalls einen größeren Teil des Manuskripts durchging und Herrn stud. ing. H. HENCKY, der mir die meisten der nicht schematischen Figuren nach gegebenen Gleichungen rechnete. Ich stelle hier, um Irrtümern vorzubeugen, noch ausdrücklich alle die schematisch entworfenen zusammen. Es sind die folgenden: 4, 4*, 5, 9*, 26, 27, 29, 44, 59—72. In Fig. 63 ist nur die gestrichelte Kurve schematisch. Die ausgezogene ist einem von der Kgl. techn. Hochschule München herausgegebenen Tafelwerk über Kurven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten entnommen. Alle anderen Figuren sind entweder punktweise gerechnet oder konstruiert.

Speyer, Anfang September 1905.

H. WIELEITNER.



INHALTS-VERZEICHNIS.

Die Abschnitt- und Paragraphen-Überschriften sind in den Kolumnentiteln, die Nummern (halbfett) an der Bundstegseite angegeben. Ein Hinweis auf die Seitenzahlen konnte deshalb erübrigt werden.

Abschnitt I.

Allgemeine Gesichtspunkte.

Abschnitt III.

Die Hessesche und verwandte Kurven.

Abschnitt IV.

Die Plückerschen Formeln.

Abschnitt V.

Geschlecht. Rationale Kurven.

1. Allgemeines.

Abschnitt XI.

Anwendungen der Sätze über Schnittpunktsysteme.

Abschnitt XII.

Kurven dritter Ordnung.

1. Die Konfiguration der Wendepunkte und harmonischen Polaren.

LITERATUR-VERZEICHNIS.

Dieses Verzeichnis, auf welches im Text mit „L. V." verwiesen ist, gibt zunächst solche größere Werke über algebraische Kurven, die im folgenden mehr oder weniger benutzt wurden, ohne daß sie ausdrücklich mit Angabe der Seitenzahlen zitiert wären, da sie ja allgemein zugänglich sind; sodann noch vier andere, die in enger Beziehung zu unserem Thema stehen.

ANDOYER, H. *Leçons sur la théorie des formes et la géométrie analytique supérieure.* Tome I. — Paris (Gauthier-Villars) 1900.

CLEBSCH-LINDEMANN. *Vorlesungen über Geometrie.* Bd. I_1 und I_2. — Leipzig (Teubner) 1876.
Bd. I_1 ist vergriffen. Die unter der Presse befindliche 2. Aufl. enthält jedoch nur die Theorie der Kegelschnitte und der Formen.

CRAMER, G. *Introduction à l'Analyse des Lignes courbes algébriques.* — Genève 1750.

CREMONA, L. *Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Kurven.* Übs. v. M. CURTZE. — Greifswald (C. A. Koch) 1865.
Vergriffen.

DURÈGE, H. *Die ebenen Kurven dritter Ordnung.* Leipzig (Teubner) 1871.

DE GUA. S. SAUERBECK.

LORIA, G. *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte.* Bearb. v. F. SCHÜTTE. — Leipzig (Teubner) 1902.

NEWTON, I. *Enumeratio linearum tertii ordinis.* — London 1704.
S. die Fußnote auf S. 244.

PLÜCKER, J. *System der analytischen Geometrie, auf neue Betrachtungsweisen gegründet und insbesondere eine ausführliche Theorie der Kurven dritter Ordnung enthaltend.* — Berlin (Duncker & Humblot) 1835.

— *Theorie der algebraischen Curven.* — Bonn (A. Marcus) 1839.
Beide vergriffen.

REUSCHLE, C. *Praxis der Kurvendiskussion.* I. Teil. — Stuttgart (Metzler) 1886.

SALMON-FIEDLER. *Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven.* 2. Aufl. — Leipzig (Teubner) 1882.

SAUERBECK, P. *Einleitung in die analytische Geometrie der höheren algebraischen Kurven.* Nach den Methoden von JEAN PAUL DE GUA DE MALVES. — Leipzig (Teubner) 1902.

SCHROETER, H. *Die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung.* Auf synthetisch-geometrischem Weg abgeleitet. — Leipzig (Teubner) 1888.

DOEHLEMANN, K. *Geometrische Transformationen. I. Teil: Die projektiven Transformationen nebst ihren Anwendungen.* — Leipzig (Göschen) 1902, S. S. XVII.

Der II. Teil, der die quadratischen und CREMONAschen Transformationen enthalten wird, ist noch nicht erschienen.

SALMON-FIEDLER. *Analytische Geometrie der Kegelschnitte.* I. Teil. 6. Aufl. 1898. II. Teil. 6. Aufl. 1903. — Leipzig (Teubner).

SIMON, M. *Analytische Geometrie der Ebene.* — Leipzig (Göschen) 1900, S. S. VIII.

WIELEITNER, H. *Bibliographie der höheren algebraischen Kurven für den Zeitabschnitt von 1890—1904.* — Leipzig (Göschen) 1905.

ABSCHNITT I.

ALLGEMEINE GESICHTSPUNKTE.

§ 1. Begriff einer (algebraischen) Kurve. Projektive und metrische Eigenschaften. Koordinaten.

1. Wenn wir aufs Geratewohl mit dem Stift einen Linienzug beliebiger Art auf das Papier zeichnen, so ist das entstandene Gebilde eine »Kurve« im weitesten Sinne des Wortes. Es ist dann theoretisch immer möglich, diese Kurve, deren Verlauf nur irgendwie definiert sein muß, unter Zugrundelegung eines passenden Koordinatensystems, wenn nicht durch eine endliche Gleichung, so doch durch eine FOURIERsche Reihenentwicklung darzustellen. So hat B. HABENICHT[1]) nicht ohne Erfolg versucht, den Formen der Blätter verschiedener Pflanzen durch Gleichungen (in Polarkoordinaten) nahezukommen. Immerhin bietet aber die Aufgabe, zu einer vorgegebenen, wenn noch so einfachen Zeichnung eine Gleichung anzugeben, ein allgemein gar nicht und in speziellen Fällen nur durch Probieren angenähert lösbares Problem[2]).

Unsere Aufgabe ist vielmehr die umgekehrte. Wir fragen etwa: *Welche Eigenschaften hat eine durch eine Gleichung $F(x, y) = 0$ auf ein Descartessches Koordinatensystem bezogene Kurve?* Von der Beschaffenheit der Funktion F

---

[1]) *Die analytische Form der Blätter.* Quedlinburg (Selbstverlag) 1895. Die betr. Gleichungen werden aber bald sehr kompliziert und von hohem Grade. So gibt HABENICHT für ein schöngeschwungenes herzförmiges Blatt [etwa wie in unserer Fig. 25(a)] die Gleichung $\varrho = 5 + 3\cos^{71}\varphi$; für das dreiteilige Blatt des Sauerklees $\varrho = 4(1 + \cos 3\varphi) + 4\sin^2 3\varphi$; für das Efeublatt $\varrho = 3(1 + \cos^9\varphi) + 2\cos\varphi + \sin^2\varphi - 2\sin^2 3\varphi\cos^4\frac{\varphi}{2}$.

[2]) Ansätze dazu finden sich bei C. REUSCHLE (L. V.), S. 127 ff. Auch wir werden in Nr. 62 ein Beispiel, gerade für die vorhin erwähnte Herzform, geben.

wird die Antwort abhängen (vgl. die unten folgende Bem.). Die allgemein übliche Unterscheidung der Funktionen in »algebraische« und »transzendente«, die schon von JOH. BERNOULLI (1667—1759) herrührt, scheidet auch die Kurven sofort in algebraische Kurven und transzendente Kurven, eine Unterscheidung, die noch älter ist und bereits von DESCARTES selbst in seiner „*Géométrie*" (Leyden, 1637)[3]), dem grundlegenden Werk für die analytische Geometrie und die Theorie der algebraischen Kurven überhaupt, durchgeführt wurde. Freilich hat diese Unterscheidung den Übelstand, daß sie ausschließlich auf dem Gebrauch der kartesischen Koordinaten beruht und Kurvengattungen trennt, die bei Anwendung anderer Koordinatensysteme, z. B. der Polarkoordinaten, zusammenhängen. Dieser Umstand fällt jedoch außerordentlich gering ins Gewicht gegenüber dem ungeheuren Vorteil, den wir bei Betrachtung der algebraischen Kurven dadurch genießen, daß uns hierbei die heute schon zu hoher Vollendung gelangte Theorie der algebraischen Formen (Invariantentheorie mit Einschluß der Theorie der algebraischen Gleichungen) und nicht zuletzt die Theorie der algebraischen Funktionen selbst zur Verfügung steht. Dies um so mehr, da wir uns vorgenommen haben eine allgemeine Theorie der algebraischen Kurven zu entwerfen.

Bem. Es ist, sobald $F(x, y) = 0$ eine Kurve darstellen soll, als selbstverständlich vorausgesetzt, daß diese Gleichung y als eine »gewöhnliche« (nach P. DU BOIS-REYMOND), oder wie F. KLEIN dies, im Anschluß an JACOBI bezeichnet, als »vernünftige« Funktion $f(x)$ von x erscheinen lasse, d. h. daß $f(x)$ stetig, endlich oft differenzierbar und abteilungsweise monoton gegen jede als Abszissenachse gedachte Richtung sei. Die allgemeine Funktionenlehre weist nach, daß nur beim Zusammenbestehen dieser drei Bedingungen der Funktion $y = f(x)$ das entspricht, was man gemeinhin als Kurve bezeichnet[4]). — Jede algebraische Funktion

[3]) Neueste deutsche Ausgabe von SCHLESINGER, Berlin (Mayer und Müller) 1894.

[4]) Vgl. etwa F. KLEIN, *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien.* Autogr. Vorlsg. Leipzig (Teubner) 1902. — Bez. aller genaueren Unterscheidungen, die wir für den vorliegenden Zweck nicht gerade nötig haben, sei auf den Artikel von A. PRINGSHEIM: „*Grundlagen der allgemeinen Funktionenlehre*" in Enz. d. math. Wiss. II A 1 verwiesen.

$f(x, y)$ setzen wir in der rational ganzen Form voraus

$$f(x, y) \equiv \sum_0^n {}^{\nu} \sum_0^m {}^{\mu} a_{\mu\nu} x^{\mu} y^{\nu} .$$

Alles, was nicht in diese Form gebracht werden kann, heißt transszendent, wenn man nicht etwa mit LEIBNIZ solche Funktionen, wie $y = x^{\sqrt{2}}$, als »*interszendent*« bezeichnen will.

$F(x, y) = 0$ heißt bekanntlich die »*implizite*« Form der Gleichung, aus der die »*explizite*« Form $y = f(x)$ im allgemeinen nicht hergestellt werden kann. Daneben wird manchmal auch die »*Parameterdarstellung*«

$$x = \Phi(\lambda) \qquad y = \Psi(\lambda)$$

benutzt, aus der durch Elimination von λ die implizite Form wieder erhalten wird.

Polarkoordinaten (ϱ, φ) gebrauchen wir selten. Wir merken nur der Vollständigkeit wegen an, daß dieselben mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y durch die Gleichungen zusammenhängen:

$$x = \varrho \cos\varphi \qquad y = \varrho \sin\varphi ,$$

woraus

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} .$$

2. Um die beiden in der vorigen Nummer bezeichneten Hilfsmittel näher ins Auge zu fassen, ist es nötig, etwas weiter auszugreifen. Es sei

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

die Gleichung einer algebraischen Kurve C, $f(x, y)$ also eine rational ganze Funktion der Koordinaten x, y — Nenner würden sich ja wegmultiplizieren lassen — so wird die Kurve C verschiedene Eigenschaften haben, die von dem gewählten Koordinatensystem abhängen: Tangentenrichtung, höchste und tiefste Punkte, Länge der Tangenten oder Normalen von einem Kurvenpunkt aus gerechnet bis zu einer der Achsen u. dgl. m. Ja die Kurve kann vielleicht gerade durch irgend eine Beziehung dieser Stücke definiert sein und Gleichung (1) ist die Lösung einer bestimmten Differentialgleichung, da die erwähnten Größen alle sich durch die Differentialquotienten von f ausdrücken lassen. Wir erinnern nur daran, daß z. B. bei der Parabel die Subnormale konstant ist, wenn ihre Achse als Koordinatenachse

1*

genommen wird[4a]). Solche Eigenschaften sind aber für die Kurve selbst unwesentlich und werden sich bei anderer Lage des Koordinatensystems anders darstellen. Gewisse Eigentümlichkeiten aber wird es geben, die der Kurve inhärent sind. So erscheint z. B. die Parabel von allen Punkten einer bestimmten Geraden (der Direktrix) aus unter rechtem Winkel. Dies ist eine »metrische« Eigenschaft. Wir werden auch solche an einigen Kurven betrachten.

Viel wichtiger sind uns aber in der allgemeinen Theorie die *reinen Eigenschaften der Lage, die bei jeder Zentralprojektion erhalten bleiben,* mag die Kurve ihre Gestalt dabei auch in der auffallendsten Weise ändern. Diese Eigenschaften sind nicht nur selbstverständlich ganz unabhängig vom Koordinatensystem, sondern auch von der Beziehung der Kurve zum Unendlichfernen.

Um wieder an die Parabel anzuknüpfen, so weiß man beispielsweise, daß jede durch den Brennpunkt F gezogene Gerade die Parabel in zwei Punkten schneidet, die harmonisch liegen zum Schnittpunkt mit der Direktrix und zum Brennpunkt. Projizieren wir die ganze Figur, so wird die Parabel zu einer Ellipse oder Hyperbel, der Brennpunkt zu irgend einem Punkte F_1, die Direktrix eine beliebige Gerade, aber auf jedem Strahl durch F_1 liegen wieder vier harmonische Punkte: *Wir erkennen in dem Satz für die Parabel einen speziellen Fall der allgemeinen Polareneigenschaft.*

Der Leser wird sich schon in der Geometrie der Kegelschnitte daran gewöhnt haben, eine Figur mit allen aus ihr projektiv ableitbaren als wesentlich identisch zu betrachten, sofern es eben auf metrische Eigenschaften (Entfernungen, Winkelgrößen) nicht ankommt. Der Schritt, den wir von der Theorie der Kegelschnitte aus machen, besteht auch bloß darin, daß wir in Gleichung (1) die höchste vorkommende Exponentensumme (Dimension) eines Gliedes > 2 nehmen.

3. Wir bezeichnen, wie üblich, die unendlich ferne Gerade mit $z = 0$ und machen, indem wir x/z, y/z statt x, y einführen und z als dritte (»homogenisierende«) Variable betrachten, die Gleichung (1) homogen, so daß in

$$f(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

[4a]) Über all diese Verhältnisse siehe W. Fr. Meyers *Integralrechnung,* S. S. XI, Leipzig (Göschen) 1905, S. 158 ff.; speziell bez. der Parabel S. 178.

die Koordinaten x, y, z vollständig gleichberechtigt auftreten und jedes Glied dieselbe Dimension hat. Durch Projektion wird dieses Koordinatendreiseit, dessen eine Seite im Unendlichen liegt, ganz ins Endliche gebracht und wir werden deshalb, um die Gleichberechtigung auch äußerlich hervortreten zu lassen, bei projektiven Problemen statt x, y, z durchweg x_1, x_2, x_3 schreiben. Was die Koordinaten bei dieser allgemeinen Bestimmung geometrisch bedeuten, ist meistens ohne Belang. Es sei nur bemerkt, daß sie in der Tat projektiv sind, da sie sich durch Doppelverhältnisse definieren lassen (v. STAUDT-FIEDLER[5])).

Beisp. $f(x, y) \equiv axy + bx + cy = 0$ stellt eine Hyperbel dar, die durch den Anfangspunkt und die unendlich fernen Punkte der Achsen geht, welch letzteres man in der homogenen Form: $axy + bxz + cyz = 0$ sofort erkennt. Setzen wir $x, y, z = x_1, x_2, x_3$, so stellt $a x_1 x_2 + b x_1 x_3 + c x_2 x_3 = 0$ einen Kegelschnitt dar, der durch die jetzt ganz gleichberechtigten drei Koordinatenecken hindurchgeht.

4. Zeichnen wir zwei zueinander projektive Figuren in ein und derselben Ebene, so ist bekannt, daß dieselben in der Beziehung der Kollineation zueinander stehen, die analytisch durch eine lineare Transformation der Variablen ausgedrückt wird. In der Tat zeigt schon eine oberflächliche Betrachtung, daß die Gleichung

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{3}$$

durch eine Substitution

$$\vartheta_j x_i = a_{i1} x_1' + a_{i2} x_2' + a_{i3} x_3' \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{4}$$

in eine Gleichung

$$f_1(x_1', x_2', x_3') = 0 \tag{5}$$

übergeht, die von demselben Grad ist wie (3) und daß dabei jede Gerade wieder in eine Gerade transformiert wird. Man

[5]) Siehe des letzteren *„Darst. Geom. usw."*, Leipzig (Teubner) 1888, III. Teil § 14, wo auch Literatur über homogene Koordinaten. Bez. einer genaueren Einführung in die Theorie derselben müssen wir, wie auch für das Folgende, um nicht zu weit abzuschweifen, auf die ebenso elegante, wie ausführliche Darstellung bei DOEHLEMANN, *„Geom. Transformationen, I. Teil"*, S. S. XXVII, Leipzig (Göschen) 1902, verweisen. — In Nr. 136 verwenden wir Doppelverhältniskoordinaten, worauf hier verwiesen sei.

sieht auch gleich, daß auf jeden Fall, da ja 9 homogene (8 wesentliche) Konstante (a_{ik}) zur Verfügung stehen, drei beliebige Punkte, die man sich als Koordinatenecken denken mag, in drei beliebige andere transformierbar sind. Eine genauere Betrachtung zeigt, daß dies sogar noch für einen vierten Punkt möglich ist, indem die Substitution von 4 Koordinatenpaaren x_i, x'_i in das System (4) 12 homogene Gleichungen ergibt mit 13 Unbekannten ($9\,a_{ik} + 4\,\vartheta_j$, weil ϑ_j immer nur für ein Gleichungstripel dasselbe ist).

Es ist nun gerade die Aufgabe der Invariantentheorie, diejenigen Eigenschaften einer Form $f(x_1, x_2, x_3)$ anzugeben und zu untersuchen, die bei linearer Transformation unverändert (invariant) bleiben. *Und die projektive Theorie der Kurven wäre nichts anderes als die Übersetzung der Theorie der ternären Formen (Formen mit 3 homogenen Variablen) ins Geometrische*[6]. Gerade dieser Umstand schließt die algebraischen Kurven zu einer Gruppe zusammen, da für transzendente Kurven resp. Funktionen ähnliche projektive Eigenschaften nicht existieren, wenigstens nicht nachgewiesen sind.

§ 2. Definition der algebraischen Kurve n^{ter} Ordnung. Imaginäre Elemente. 1. Beispiel.

5. *Wir definieren demnach eine algebraische Kurve n^{ter} Ordnung C_n als das geometrische Bild einer gleich Null gesetzten Form n^{ter} Dimension in den Variablen x_1, x_2, x_3.* Ihre Gleichung kann daher geschrieben werden:

$$(6)\quad \begin{cases} f^{(n)}(x_1, x_2, x_3) \equiv u^{(0)} x_3^n + u^{(1)} x_3^{n-1} + \ldots + u^{(n-1)} x_3 \\ \qquad\qquad + u^{(n)} = 0, \end{cases}$$

wo die $u^{(i)}$ binäre Formen der Variablen x_1, x_2 der durch den oberen Index angegebenen Dimension bedeuten.

Bem. Wir werden öfters für Kurve 3. Ordg. »Kubik«, für Kurve 4. Ordg. »Quartik«, für Kurve n^{ter} Ordg. »n-ik« sagen. Es muß auch noch angemerkt werden, daß Gleichung (6) nur dann eine »eigentliche n-ik« darstellt, wenn die Form $f^{(n)}(x_1, x_2, x_3)$ irreduzibel ist, d. h. nicht in zwei oder mehr rational ganze Faktoren zerlegt werden kann. Im letzteren Falle heißt die Kurve

[6]) Diese Aufgabe ist, soweit es der Stand der Wissenschaft erlaubt, in Clebsch-Lindemann I. Teil (L. V.) gelöst.

»uneigentlich« oder »zerfallen«. So bildet irgend ein Kegelschnitt mit einer beliebigen Geraden zusammen eine zerfallene Kubik, zwei Kegelschnitte eine zerfallene Quartik usw. Wir werden später sehen (Nr. 53), wie man aus solchen zerfallenen Kurven auf die Gestalten der eigentlichen Kurven derselben Ordnung schließen kann.

Das zu einer Gleichung gehörige geometrische Bild braucht jedoch durchaus nicht in allen Teilen reell zu sein, es kann ganz oder bis auf einzelne Punkte imaginär werden. Wir brauchen nur zu erinnern an den vollständig imaginären Kreis $x^2 + y^2 + r^2 = 0$, oder an die Gleichung $x^2 + y^2 = 0$, die, wenn wir nur das Reelle berücksichtigen wollten, bloß den Anfangspunkt darstellen würde, die aber, allgemeiner gefaßt, einen in zwei Gerade zerfallenen (Null-)Kreis repräsentiert: zwei Gerade, deren Richtungen durch $\operatorname{tg} \alpha = \pm i$ ($i = \sqrt{-1}$) gegeben sind und die auf der unendlich fernen Geraden bekanntlich die beiden für die ganze Metrik fundamentalen »zyklischen (= Kreis-)Punkte« ausschneiden. Von diesem allgemeineren Standpunkte aus, der sich uns im Laufe der Untersuchungen von selbst aufdrängen wird, ist es auch meist unnötig, in Gleichung (6) die Koeffizienten reell vorauszusetzen. (Vgl. Nr. 12, Bem.).

Wir machen hier diese Bemerkung ein für allemal, besonders da wir uns später, den ganz allgemeinen Standpunkt verlassend, häufig an die Anschauung wenden werden. Es ist nur noch hinzuzufügen, daß auch unsere Projektionen (resp. Kollineationen) keineswegs immer reell zu denken sind. So ist es z. B. möglich, die zwei imaginären Kreispunkte in zwei beliebige reelle oder imaginäre Punkte der Ebene zu transformieren, was nichts anderes aussagt, als daß eben metrische Beziehungen nicht projektiv sind.

6. Es ist hier nicht unsere Aufgabe, die systematische Einführung der imaginären Elemente in die Geometrie näher auseinanderzusetzen. Das Imaginäre hatte sich in der Analysis längst das Heimatrecht erstritten, und machte sich in der analytischen Geometrie schon bei den einfachsten Problemen in unangenehmer und bisweilen geheimnisvoller Weise bemerkbar, bis Monge (1746—1818) den imaginären Elementen auch hier das Bürgerrecht verlieh. In welch großartiger Weise diese Einführung sich, besonders unter

den Händen PLÜCKERS und HESSES belohnte, wird dem Leser vielleicht später deutlich werden. Eine große Schwierigkeit bestand freilich für die synthetische Geometrie. Doch auch diese wurde von v. STAUDT[7]) im Prinzip endgültig beseitigt. E. KÖTTER[8]) und R. DE PAOLIS[9]) haben, darauf weiterbauend, versucht, eine rein geometrische Grundlage für die Theorie der algebraischen Kurven zu schaffen. Wir können jedoch hierauf, schon wegen der Subtilität der diesbez. Untersuchungen, nicht eingehen, wenn wir es auch keineswegs verschmähen werden, rein geometrische Betrachtungen dort anzustellen, wo diese anschaulicher sind oder der algebraische Apparat zuviel Vorkenntnisse erfordern würde.

7. In welcher Weise imaginäre Elemente auftreten, wollen wir an zwei Beispielen zeigen, die uns Gelegenheit geben werden, auch sonst noch einige fundamentale Begriffe zu demonstrieren.

Wir denken uns zunächst irgend einen Kegelschnitt, z. B. die Ellipse mit der Gleichung

$$(7) \qquad \mathsf{E} \equiv \frac{(x-A)^2}{a^2} + \frac{(y-B)^2}{b^2} - 1 = 0$$

gegeben und suchen den Ort der Mittelpunkte aller Ellipsensehnen durch einen festen Punkt O, als den wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit den Anfangspunkt nehmen können. Setzen wir demnach in (7) $y = \lambda x$, so erhalten wir zur Bestimmung der Abszissen x', x'' der Endpunkte der variablen Sehne die Gleichung

$$(8) \qquad \frac{(x-A)^2}{a^2} + \frac{(\lambda x - B)^2}{b^2} = 1\,.$$

Sind ξ, η die Koordinaten des Sehnenmittelpunktes, so erhält man

$$(9) \qquad \xi = \frac{x' + x''}{2} = \frac{A/a^2 + \lambda B/b^2}{1/a^2 + \lambda^2/b^2}\,, \quad \eta = \lambda \xi\,.$$

---

[7]) *Beiträge zur Geometrie der Lage.* Nürnberg, 1856—60. Eine zusammenfassende analytische Darstellung s. z. B. bei CLEBSCH-LINDEMANN, II_1, S. 104—130.

[8]) *Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Kurven.* Preisschrift der Steiner-Stftg. Abhdlg. Ak. Berlin 1887. Hier auch Literatur.

[9]) *„Le corrispondenze projettive nelle forme geometriche fondamentali di 1ª specie.“* (Mem. Acc. Torino **42**, 1892, S. 495—584.)

Setzt man demnach in dem Ausdrucke für ξ $\lambda = \eta/\xi$, so ergibt sich als Gleichung des gesuchten Ortes schließlich die Ellipse

$$(10) \quad \mathsf{E}' \equiv \frac{(\xi - \frac{1}{2} A)^2}{a^2} + \frac{(\eta - \frac{1}{2} B)^2}{b^2} - \left(\frac{A^2}{4\,a^2} + \frac{B^2}{4\,b^2}\right) = 0,$$

die zu E ähnlich und ähnlich gelegen ist. Dabei ist die gegenseitige Lage von E und O ganz gleichgültig; die analytische Rechnung gibt ohne jede Störung das gleiche Resultat, ob O innerhalb oder außerhalb E liegt. Wollen wir aber den Ort konstruktiv suchen und liegt O außerhalb von E, so haben nur die Strahlen zwischen den von O an E gehenden Tangenten reelle Schnittpunkte; gleichwohl liegen auch auf allen andern Strahlen Ellipsensehnen (mit konjugiert imaginären Endpunkten), deren reelle Mittelpunkte eben die Ellipse E' erfüllen.

Dieses Resultat läßt sich natürlich auf alle andern Kegelschnitte — auch zerfallene — übertragen. Wir werden in Nr. 85 den Fall verwenden, wo der Grundkegelschnitt ein Linienpaar ist.

§ 3. 2. Beispiel: Diskussion einer speziellen Quartik.

8. Als zweites Beispiel wollen wir eine spezielle Kurve 4. Ordg. diskutieren, deren Gleichung sei

$$(11) \quad f(x, y) \equiv 2\,(x^4 + y^4) + 5\,x^2 y^2 - 6\,(x^2 + y^2) + 3 = 0$$

oder homogen gemacht

$$(11^*) \quad \begin{cases} f(x, y, z) \equiv 2\,(x^4 + y^4) + 5\,x^2 y^2 - 6\,(x^2 + y^2)\,z^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 3\,z^4 = 0. \end{cases}$$

Setzt man hier $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, so erhält man nacheinander die Schnittpunkte der Kurve mit den beiden Achsen und der unendlichfernen Geraden. Für $z = 0$ ergibt sich $2\,(x^4 + y^4) + 5\,x^2 y^2 = 0$, welche Gleichung vier Strahlen durch den Anfangspunkt darstellt, die nach den unendlichfernen Punkten der Kurve laufen. Da aber

$$2\,(x^4 + y^4) + 5\,x^2 y^2 \equiv (2\,x^2 + y^2)\,(x^2 + 2\,y^2),$$

so sind all diese Strahlen imaginär, d. h. f liegt ganz im Endlichen. Dies ist auch der Grund, warum wir eine

Quartik und nicht eine Kubik vorlegten. Denn die letztere kann nie ganz ins Endliche gebracht werden, da eine kubische Gleichung wenigstens eine reelle Wurzel hat.

Wir sehen ferner, da x und y nur in geraden Potenzen auftreten, daß die y- und die x-Achse Symmetrieachsen für die Kurve sind. Man kann aber in der Gleichung (11) sogar x mit y vertauschen, ohne daß sich die Gleichung ändert. Dies besagt, daß die Kurve auch gegen die Winkelhalbierenden der Achsen symmetrisch liegt. Unsere Quartik besteht also aus 8 symmetrisch um den Anfangspunkt angeordneten Oktanten. Hieraus kann man schon einsehen, daß jede Sehne durch den Anfangspunkt in diesem halbiert wird, d. h. daß der Anfangspunkt »Mittelpunkt« der Kurve ist. Analytisch macht sich dies dadurch bemerkbar, daß auch z nur in geraden Potenzen vorkommt. Die Folge davon ist nämlich, daß man bei Einführung von Polarkoordinaten in (11) eine Gleichung für ϱ^2 erhält, sobald $\varphi =$ konst. genommen wird, so daß jedem Radiusvektor ϱ ein gerade entgegengesetzter entspricht.

Bem. Bei Kurven 3ter und allgemein $(2\nu+1)$ter Ordg. muß ein ev. vorhandener Mittelpunkt demnach auf der Kurve selbst liegen; denn es verschwindet das konstante Glied, das den Faktor z^3, resp. $z^{2\nu+1}$ hätte.

Schneiden wir nun die Kurve mit einer Reihe von Parallelen zur y-Achse und setzen, um die Variabilität von x anzudeuten, $x = \lambda$, so erhalten wir für y die Gleichung:

$$(12) \quad f(y) \equiv 2y^4 + y^2(5\lambda^2 - 6) + (2\lambda^4 - 6\lambda^2 + 3) = 0$$

und hieraus

$$(13) \quad y^2 = \tfrac{1}{4}\left(6 - 5\lambda^2 \pm \sqrt{3(3\lambda^4 - 4\lambda^2 + 4)}\right).$$

Auch dieser Ausdruck zeigt zunächst für sehr große λ, da für solche die Quadratwurzel $= 3\lambda^2$ gesetzt werden kann und $6 - 2\lambda^2$, bez. $6 - 8\lambda^2$, dann jedenfalls < 0 wird, imaginäre Werte für y an, also die Kurve als im Endlichen gelegen. Die Diskriminante des biquadratischen Radikanden $\Delta = 16 - 4 \cdot 3 \cdot 4$ ist negativ, dieser selbst also, da er für $\lambda = 0$ gleich $+12$ ist, immer positiv, die Wurzel daher nie Null und immer reell. Es fallen also nur dann zwei Werte

von y^2 zusammen, wenn der Wert der Quadratwurzel $= 6 - 5\lambda^2$ wird. Dies gibt für λ die Gleichung

$$(14) \qquad 2\lambda^4 - 6\lambda^2 + 3 = 0,$$

also $\lambda_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{3})}$. Für diese Werte $x = \lambda_i$ werden immer zwei Werte von y gleich 0, wie dies ja auch der Symmetrie wegen sein muß. Für positive λ wird demnach der Wert $\lambda_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(3 + \sqrt{3})}$ zuerst einen reellen Zug der Kurve in Erscheinung treten lassen. Dies kann ja auch nach den Grundeigenschaften der algebraischen Gleichungen nur so eintreten, daß zwei zuvor imaginär konjugierte Wurzeln zusammenfallen, um sich dann reell zu trennen, und wir können den so betretenen Zweig nicht anders verlassen, als wenn dasselbe in umgekehrter Reihenfolge eintritt. Es ist auch, da $6 - 5\lambda_1^2$ immer noch negativ ist, offenbar, daß hier nur das „+"-Zeichen in (13) den reellen Werten von y entspricht. — Für $\lambda_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(3 - \sqrt{3})}$ erscheinen neuerdings zwei Werte $y = 0$, und es könnte das andeuten, daß unser Zug sich hier wieder schließt. Der Leser wird sich jedoch leicht überzeugen, daß der Wert λ_2 den Zweig, der dem „+"-Zeichen der $\sqrt{3}$ entspricht, nicht affiziert, vielmehr nun, wenn wir λ noch weiter abnehmen lassen, ein zweiter Zug innerhalb des ersten entstehen wird. Da weitere Koinzidenzen von y nicht denkbar sind, kann dieser Zug den ersten nirgends treffen und wir werden zwei ganz ineinanderliegende Zweige, eine sog. Ring- oder Gürtelkurve erhalten[10].

8a. Die Stetigkeit ist natürlich bei dieser Diskussion vorausgesetzt. Ein Kurvenzweig, der irgendwo begonnen hat, muß in sich zurücklaufen, auch wenn er durchs Unendliche geht. Es muß uns aber doch auffallen, daß wir, trotzdem uns unsere Betrachtung das reelle Kurvenbild mit hinreichender Deutlichkeit ergab, den Wertevorrat der Gleichung (11) in keiner Weise erschöpft haben. Denn wir könnten λ auch jeden komplexen Wert erteilen und würden in jedem Falle 4 Werte von y erhalten. Behandeln wir

[10]) Es kann dem Anfänger nicht genug empfohlen werden, durch Einsetzen verschiedener Werte von λ die Kurve punktweise zu berechnen und zu zeichnen. Ihre ungefähre Gestalt ist aus Fig. 56 (Kurve *3*) ersichtlich.

nur einmal etwa das Problem der Koinzidenzen von y (der zur y-Achse parallelen Tangenten) direkt von der Gleichung (12) aus! Eine Gleichung hat eine Wurzelkoinzidenz, wenn zugleich ihre Abgeleitete verschwindet. Nun ist

$$f'(y) \equiv \frac{\partial f}{\partial y} = 2y[4y^2 + 5\lambda^2 - 6] = 0,$$

und wir werden also vertikale Tangenten haben 1) wo $y = 0$ ist; das sind die oben gefundenen Werte, 2) wo die Ellipse $4y^2 + 5x^2 - 6 = 0$ die Quartik schneidet. Diese Ellipse verläuft aber ganz in dem Ring, den die beiden Kurvenzweige bilden und schneidet also in imaginären Punkten, in denen demnach imaginäre Kurvenzweige ihren Ursprung nehmen[11]). Es kann jedoch keineswegs Aufgabe der eigentlichen Kurventheorie sein, all diesen Wertesystemen gerecht zu werden, da wir dieselben ja in der Koordinatenebene gar nicht darstellen könnten. Dazu ist vielmehr eine mehrblätterige (RIEMANNsche) Fläche nötig und es ist das große Reich der Theorie der algebraischen Funktionen, in das wir hier einen Blick tun, und von dem sozusagen die Theorie der Kurven eine Provinz ist[12]). (Vgl. auch Fußnote 14).

§ 4. Das Dualitätsprinzip. Linienkoordinaten.

9. Die Polarentheorie der Kegelschnitte gab den Geometern des 18. Jahrhunderts[13]) Anlaß zur Entdeckung des für die ganze projektive Geometrie fundamentalen Dualitäts- oder Reziprozitätsprinzips, laut dem wir jedem Satze

---

[11]) Diese Koinzidenzen erhält man natürlich auch aus (13), wenn man das „—"-Zeichen in Betracht zieht.

[12]) Siehe *Theorie der algebr. Funktionen usw.* von E. LANDFRIEDT, S. S. XXXI, Leipzig (Göschen) 1902. Dort vermißt man leider jede geometrische Versinnbildlichung. In dieser Beziehung findet der Leser, der die Grundlagen dieser Theorie kennt, bei CLEBSCH-LINDEMANN alles Einschlägige. Im übrigen vergleiche man den *„Bericht über die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen usw."* von BRILL und NOETHER, Berlin (Reimer) 1894, eine Fundgrube für unseren ganzen Stoff.

[13]) PONCELET und GERGONNE stritten sich zeitlebens um die Priorität, ein Streit, in den später auch PLÜCKER hineingezogen wurde, dem das Prinzip seine innere Festigung verdankt.

einen andern gegenüberstellen können, indem wir nur »Punkt« mit »Gerade« und umgekehrt vertauschen. Dieses Prinzip wird auch allen unseren Untersuchungen über höhere Kurven seinen Stempel aufdrücken. Wir sind es freilich gewohnt, schon wegen unserer Art zu zeichnen, eine Linie als stetige Folge von Punkten aufzufassen. Nichts hindert aber, uns wenigstens vorzustellen, daß dieselbe Linie durch eine stetige Folge von Geraden erzeugt werde. Die reziproke Figur unserer Kurve erhalten wir ja, indem wir zu jedem Punkte die Polare, oder zu jeder Tangente den Pol, in bezug auf einen beliebigen Kegelschnitt bestimmen. Die polare Kurve ist so entweder durch ihre Tangenten oder durch ihre Punkte bestimmt.

Um diese Dualität analytisch zu fixieren, müssen wir nur statt von drei Koordinaten**seiten**, von drei Koordinaten**ecken** ausgehen. Jede Gerade hat dann drei (homogene) Koordinaten und jeder Punkt wird durch eine lineare Gleichung zwischen diesen Koordinaten festgelegt. Man vergesse nicht, daß die Ebene sowohl ∞^2 Punkte, als ∞^2 Gerade enthält[14]) und daß daher eine Gleichung in Linienkoordinaten ebenso wie in Punktkoordinaten aus einer zweifachen Mannigfaltigkeit eine einfache, d. h. in jedem Falle eine Kurve herausschneidet. Dies ist im linearen Falle bei Punktkoordinaten eine Punktreihe (= Gerade), bei Linienkoordinaten ein Strahlenbüschel (= Punkt). Schreiben wir die bilineare Gleichung

$$(15) \qquad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0\,,$$

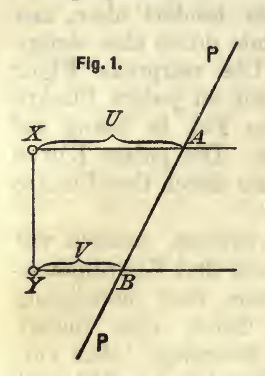
so stellt dieselbe eine Gerade mit den Koordinaten u_i dar, sobald wir die x_i als Koordinaten betrachten, oder einen Punkt x_i, wenn wir die u_i als Koordinaten auffassen.

10. Wollen wir von dem homogenen System der Linienkoordinaten zu einem metrischen übergehen, so werden wir

---

[14]) Bei dieser Zählung sind die imaginären Elemente ausgeschlossen. Bei Berücksichtigung derselben würde die Ebene ∞^4 Punkte (Gerade) enthalten, jede Kurve ∞^2. Infolgedessen läßt sich das ebene Punktfeld auf einen vierdimensionalen Raum abbilden, wo dann die Kurven durch zweidimensionale Gebilde dargestellt werden. Siehe etwa St. Kwietniewski: *„Über Flächen des vierdimensionalen Raumes usw.“*, Diss. Zürich 1902; auch C. Segre: *„Rappresentazioni reali delle forme complesse“*, Math. Ann. **40**, 1892, S. 413—468.

ein dem kartesischen reziprokes erhalten, wenn wir wie dort eine Seite, hier eine Ecke des Koordinatendreiecks ins Unendliche verlegen. Eine vollständige Reziprozität ist dabei freilich nicht erreichbar, da das Unendlichferne in der projektiven Geometrie immer als Gerade, nie als Punkt aufgefaßt werden kann. Das (mit dieser Einschränkung) dualistische (SCHWERINGsche) System[15]) besteht dann aus zwei Achsenpunkten X und Y und zwei durch die unendlich ferne Ecke gehenden (parallelen) Geraden, die man zweckmäßig zur Verbindungslinie der Achsenpunkte senkrecht nimmt (s. Fig. 1). Koordinaten U, V einer Geraden P sind die von X und Y aus gemessenen Abschnitte XA bez. YB, welche P auf den beiden Parallelen macht; denn die Schnittpunkte A, B entsprechen den Verbindungslinien eines Punktes P im kartesischen System mit den unendlich fernen Punkten der Achsen (den Achsenparallelen).



11. Sind nun diese SCHWERINGschen Koordinaten zur direkten Inangriffnahme besonders metrischer Probleme in Linienkoordinaten alleinig geeignet, so werden wir freilich im weiteren keinen Gebrauch davon machen können, da wir einerseits allgemeinere Ziele verfolgen, andererseits nur

---

[15]) Siehe „*Theorie und Anwendung der Linienkoordinaten usw.*" von Dr. KARL SCHWERING, Leipzig (Teubner) 1884. — Früher war schon UNVERZAGT auf dieses Koordinatensystem gekommen (Osterprogr. des Realgymn. Wiesbaden 1871). Unabhängig davon auch M. D'OCAGNE. Vgl. dessen „*Coordonnées parallèles et axiales*", Paris (Gauthier-Villars) 1885. Bezüglich der Dualität siehe eine Notiz von V. SCHLEGEL in Zeitschr. Math. Phys. **23**, 1878, S. 195. Eine vollständige Behandlung, auch der Koordinaten eines Punkts in SCHWERINGschen Koordinaten bei C. KÖHLER „*Zur Einführung der Linien-Koordinaten in die analytische Geometrie der Ebene*", Zeitschr. Math. Phys. **32**, 1887, S. 152—169; bezüglich der Punktkoordinaten im SCHWERINGschen System auch M. D'OCAGNE in Nouv. Ann. Math. (3) **6**, 1887, S. 493—502. — Wir geben hier ausnahmsweise so viele Zitate, weil nach unserer Meinung das SCHWERINGsche Koordinatensystem verdiente, mehr verwendet zu werden.

die PLÜCKERschen[16]) Linienkoordinaten in unmittelbarer, logischer Beziehung zu den kartesischen Punktkoordinaten stehen, die wir sonst benützen. Wie bekannt, werden diese PLÜCKERschen Linienkoordinaten u, v dadurch definiert, daß man in Gleichung (15) die dritten Variablen $= 1$ setzt. Die Gleichung der Geraden lautet dann auf rechtwinklige Achsen bezogen

$$ux + vy + 1 = 0 \tag{16}$$

und u, v stellen sich geometrisch als die negativ-reziproken Abschnitte der Geraden mit den Achsen dar.

12. *Wir definieren folgerichtig als Kurve ν^{ter} Klasse C^ν* (kurz Klassen-ν-ik) *das geometrische Bild einer gleich Null gesetzten Form ν^{ter} Dimension in den Variablen u_1, u_2, u_3*, wenn wir homogene Linienkoordinaten anwenden:

$$\varphi^{(\nu)}(u_1, u_2, u_3) = 0. \tag{17}$$

Und ist geometrisch die n-ik C_n dadurch gekennzeichnet, daß sie von jeder Geraden in n Punkten geschnitten wird, so gehen an die ν-ik C^ν von jedem Punkte der Ebene ν Tangenten. Denn in jedem Falle gibt die Gleichung n^{ten} [ν^{ten}] Grades in Verbindung mit einer linearen Gleichung von der Form (15) n [ν] Lösungen.

Wir wollen es auch der Algebra überlassen zu beweisen, daß zwei Kurven m^{ter} bez. n^{ter} Ordg. [Klasse] mn Punkte [Tangenten] gemein haben. Sollten sich in einem Falle mehr als mn gemeinschaftliche Elemente ergeben, so müßten beide Gleichungen einen gemeinschaftlichen Faktor, beide Kurven also einen gemeinschaftlichen Bestandteil haben, also beide zerfallen sein.*

Sind $F = 0$ und $f = 0$ zwei verschiedene n-iken, so stellt die Gleichung

$$F + \lambda f = 0 \tag{18}$$

für jedes λ ebenfalls eine n-ik dar, die durch alle n^2 Punkte, in denen zugleich $F = 0$ und $f = 0$, gehen muß. Die Gesamtheit all dieser Kurven heißt man seit LAMÉ (1818)

---

[16]) Wie in Fußnote 13 schon angedeutet, war es PLÜCKER, der dadurch, daß er Gerade und Punkt als gleichberechtigt auffaßte und dies analytisch begründete, das Dualitätsprinzip erst auf sicheren Boden stellte. Siehe seine *„Analytisch-geom. Entwicklungen"*, Essen (Bädeker) 1828/31, II. Bd. 2. Abtlg.

* or one is completely contained in the other.

»Büschel«, das dualistische Gebilde »Schar«. λ nennt man den Parameter des Systems.

Die naheliegende Frage nach dem Zusammenhang zwischen Ordnung und Klasse derselben Kurve führt uns zum nächsten Abschnitt.

Bem. Beispiele für Büschel von Kurven werden uns im folgenden häufig begegnen. Für jetzt möchten wir nur auf den Fall zurückkommen, daß die Koeffizienten der Gleichung einer Kurve $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ (wenigstens zum Teil) imaginär sind (Nr. 5). Trennen wir nämlich in diesem Falle das Reelle und Imaginäre, so läßt sich die Gleichung in der Form schreiben

$$f \equiv f_1(x_1, x_2, x_3) + i f_2(x_1, x_2, x_3) = 0$$

und wir sehen, daß f einem Büschel angehört, das die beiden Kurven f_1 und f_2 enthält. Das reelle geometrische Bild von f besteht also (wegen des imaginären Parameters i) nur aus der endlichen Zahl (0 eingeschlossen) von reellen Punkten, die den Kurven f_1 und f_2 gemeinsam sind.

So stellt die Gleichung $x + iy = 0$ im reellen Gebiet nur den Anfangspunkt dar, die Gleichung $x^2 + y^2 - iy - a^2 = 0$ die beiden Punkte $(+a, 0)$ und $(-a, 0)$, während durch die Gleichung $x^2 + y^2 - (a + ib) = 0$ überhaupt kein reeller Punkt repräsentiert wird.

ABSCHNITT II.

I. POLARENTHEORIE. DIE EINFACHEN SINGULARITÄTEN. BEZIEHUNG ZWISCHEN ORDNUNG UND KLASSE EINER KURVE.

§ 5. **Polarkurven verschiedener Ordnung.**

13. Um das Verhalten einer n-ik zu einer Geraden zu untersuchen, verfährt man nach JOACHIMSTHAL (1818/61) so, daß man sich auf der Geraden zwei beliebige Punkte $P(x_1, x_2, x_3)$ und $Q(y_1, y_2, y_3)$ denkt, so daß die Koordinaten z_i eines Punktes S der Verbindungslinie PQ sich in der Form darstellen lassen:

$$\vartheta z_i = \lambda x_i + \mu y_i \,.$$

Ist dann S einer der Schnittpunkte von PQ mit der Kurve $f = 0$, so wird diese Gleichung durch die Koordinaten z_i erfüllt werden. Das Substitutionsresultat läßt sich nach dem TAYLORschen Lehrsatz entwickeln und ergibt, nach fallenden Potenzen von λ geordnet:

$$\lambda^n f^x + \lambda^{n-1} \mu \sum_1^3{}^i y_i \frac{\partial f^x}{\partial x_i}$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 2} \lambda^{n-2} \mu^2 \sum_1^3{}^i \sum_1^3{}^k y_i y_k \frac{\partial^2 f^x}{\partial x_i \partial x_k} + \ldots = 0 \quad {}^{17)}$$

oder, wenn wir setzen

$$\varDelta_y(f^x) \equiv \sum_1^3{}^i y_i \frac{\partial f^x}{\partial x_i} = y_1 \frac{\partial f^x}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f^x}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial f^x}{\partial x_3}$$

---

[17]) Der Anfänger muß sich hier und später, wo immer der Raumersparnis wegen Abkürzungen und Zusammmenfassungen eingeführt sind, die vollen Ausdrücke anschreiben. Nur so kann er es dazu bringen, daß er bald auch die abgekürzten Ausdrücke lesen lernt.

und, wie üblich, die Potenzen des Operationszeichens $\varDelta$ symbolisch nehmen:

$$(1)\quad \begin{cases} \lambda^n f^x + \lambda^{n-1}\mu\,\varDelta_y(f^x) + \frac{1}{1\cdot 2}\lambda^{n-2}\mu^2\varDelta_y^2(f^x) + \dots \\ \qquad + \frac{\lambda\,\mu^{n-1}}{(n-1)!}\varDelta_y^{n-1}(f^x) + \frac{\mu^n}{n!}\varDelta_y^n(f^x) = 0\,. \end{cases}$$

Hätten wir aber nach fallenden Potenzen von μ geordnet, so hätten wir die mit der eben angeschriebenen vollkommen identische Entwicklung erhalten:

$$(1^*)\quad \begin{cases} \mu^n f^y + \mu^{n-1}\lambda\,\varDelta_x(f^y) + \frac{1}{1\cdot 2}\mu^{n-2}\lambda^2\varDelta_x^2(f^y) + \dots \\ \qquad + \frac{\lambda^n}{n!}\varDelta_x^n(f^y) = 0\,, \end{cases}$$

woraus ohne weiteres erhellt, daß

$$(2)\qquad \frac{1}{k!}\varDelta_y^k(f^x) = \frac{1}{(n-k)!}\varDelta_x^{n-k}(f^y)\,.$$

Nennt man nun $\varDelta_y^k(f^x) = 0$, wo die x_i laufende Koordinaten sind und im $(n-k)^{\text{ten}}$ Grad auftreten, die k^{te} Polare[18]) des als fest betrachteten Punktes (y) in bezug auf die Kurve, so hat man aus (2) sofort den Satz:

I. *Liegt ein Punkt P auf der $(n-k)^{\text{ten}}$ Polare eines Punktes Q, so liegt Q auf der k^{ten} Polare von P.*

Man erkennt ferner leicht, daß die symbolischen Potenzen von $\varDelta$ denselben Gesetzen gehorchen, wie wirkliche Potenzen. So hat man z. B.

$$(3)\qquad \varDelta_y^r[\varDelta_y^s(f^x)] = \varDelta_y^{r+s}(f^x) = \varDelta_y^s[\varDelta_y^r(f^x)]$$

oder

$$(3^*)\qquad \varDelta_y^s(f^x) = \varDelta_y^{s-k}[\varDelta_y^k(f^x)]\,,$$

d. h. die Polaren der einzelnen Polarkurven in bezug auf denselben Pol Q sind alle unter den Polaren der Fundamentalkurve enthalten; schärfer ausgedrückt:

---

[18]) Diese Bezeichnung von Bobillier, Gerg. Ann. **18, 19** (1828). Polaren, deren Pol unendlich fern, schon bei Newton und Cramer (L. V.).

II. *Ein Punkt Q hat dieselbe s^{te} Polare in bezug auf die gegebene n-ik, wie in bezug auf alle k^{ten} Polaren $(k > s)$ des nämlichen Punktes.*

Bem. Da die $(n-1)^{te}$ Polare eine Gerade, die $(n-2)^{te}$ Polare ein Kegelschnitt ist, spricht man auch oft von einer Polargeraden, von einem Polarkegelschnitt. Die Ausdrücke »gerade Polare«, konische, kubische Polare, Polare s^{ter} Ordnung werden hiernach auch ohne weiteres verstanden werden.

Spezielle Fälle. — Gleichung (2), resp. Satz I gibt für $k = n - 1$:

III. *Der Ort aller zu den Geraden eines Büschels durch P gehörigen Pole Q ist die erste Polare des Punktes P.*

Nimmt man ein zweites Geradenbüschel durch einen andern Punkt P', so entspricht diesem eine neue erste Polare. Die Pole der Geraden PP' bilden dann offenbar die Schnittpunkte dieser beiden ersten Polaren, die beide vom $(n-1)^{ten}$ Grad sind, und man hat den Satz:

IV. *Zu jeder Geraden gehören in bezug auf eine n-ik $(n-1)^2$ Pole* (Bobillier), *die* Cremona *»verbundene Pole« genannt hat.*

Anschließend wird sich der Leser auch leicht klar machen, daß die ersten Polaren aller Punkte der Geraden PP' ein Büschel durch eben die $(n-1)^2$ Pole der Geraden bilden.

Beisp. Gleichung (3) hat auch noch Geltung, wenn man für die r^{te} bez. s^{te} Polare verschiedene Pole benützt. Dann lautet sie

$$\Delta_y^r [\Delta_z^s (f^x)] = \Delta_z^s [\Delta_y^r (f^x)] .$$

Die durch eine solche Polarenbildung erhaltene Kurve heißt »gemischte Polare«. Für Kubiken resultiert hieraus z. B. der Satz:

Sind K_1 und K_2 die konischen Polaren zweier Punkte P_1 und P_2, und zieht man von P_1 die beiden Tangenten an K_2 und von P_2 an K_1, so liegen die vier Berührungspunkte in einer Geraden G, der »gemischten Polargeraden« der Punkte P_1 und P_2.

14. Sind die Punkte P und Q fest gedacht, so gibt Gleichung (1*) die n Parameterwerte λ/μ der Schnittpunkte S der Geraden PQ mit der Kurve. Liegt nun etwa Q auf der Kurve, so ist $f^y = 0$ und die Gleichung (1*) hat eine

Wurzel $\lambda = 0$. Alle Polarkurven von (y) gehen in diesem Falle durch den Pol hindurch; denn nach dem EULERschen Satz über homogene Funktionen ist ja bekanntlich

$$\frac{1}{k!}\Delta_y^k(f^y) = \left(y_1\frac{\partial}{\partial y_1} + y_2\frac{\partial}{\partial y_2} + y_3\frac{\partial}{\partial y_3}\right)^k f^y = \binom{n}{k} f^y\,,$$

also $= 0$.

Lassen wir außerdem P einen Punkt der Polargeraden von Q sein, setzen also $\Delta_x(f^y) = 0$, so fällt noch ein Schnittpunkt in den Punkt Q; die Polargerade schneidet also die Kurve in zwei unendlich nahen Punkten, ist demnach Tangente an dieselbe und nach Satz II berühren auch alle andern Polaren die gegebene n-ik im Pole Q, wenn dieser auf der Kurve liegt.

Wir haben folglich als **Gleichung der Tangente** in einem Punkte (y) der Kurve:

$$(4) \qquad \Delta_x(f^y) \equiv x_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^y + x_2\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^y + x_3\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^y = 0\,,$$

oder

$$(4^*) \qquad \boldsymbol{x_1 f_1^y + x_2 f_2^y + x_3 f_3^y = 0}\,.$$

Bem. 1. Die Tangente wird horizontal (d. h. sie geht bei rechtwinkligem Koordinatensystem durch $y = 0$, $z = 0$), wenn $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ ist. Ebenso erhält man aus $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ die vertikalen Tangenten und aus $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ die Tangenten durch den Anfangspunkt.

Nehmen wir in Gleichung (4*) x fest und y variabel, so stellt sie nach (2) die erste Polare des Punktes (x) dar und sagt in Verbindung mit $f^y = 0$ aus, daß die Berührungspunkte der Tangenten von (x) aus an die Kurve mit den Schnittpunkten der ersten Polare und der gegebenen n-ik identisch sind. Daher der Satz:

V. *Die Anzahl ν der Tangenten von einem beliebigen Punkte an eine ganz allgemeine n-ik, oder kurz die* ***Klasse der Kurve****, ist*

$$(5) \qquad \boldsymbol{\nu = n(n-1)}\,.$$

Bem. 2. Von einem Punkte (y) der Kurve aus gehen nur noch $n(n-1) - 2$ Tangenten an dieselbe, wenn wir die Tangente in dem Punkte selbst nicht rechnen. Denn es kommen zwei

(unendliche nahe) Schnittpunkte der n-ik und der Polare in Wegfall. Diese beiden Tangenten, die in der Tangente des Punktes (y) zusammenfallen, werden, wenn (y) die Kurve überschreitet, imaginär, wenn sie vorher reell waren und umgekehrt. So trennt ja bekanntlich der Umfang der Ellipse das Gebiet der Punkte mit reellen Ellipsentangenten von dem mit imaginären.

Beisp. 1. Die Polaren der Kubik $x^3 + y^3 = a^3$ für den Punkt $Q(a, a)$ lauten:

$$\text{Gerade Polare:} \quad x + y = a;$$
$$\text{Konische Polare:} \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

Die Schnittpunkte der letzteren mit der Kurve finden sich elementar:

$$x_{1,2} = 0, \quad y_{1,2} = a; \qquad x_{3,4} = a, \quad y_{3,4} = 0;$$

$$x_{5,6} = \frac{a}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2} \pm i), \qquad y_{5,6} = \frac{a}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2} \mp i).$$

Die beiden ersten Paare sind hiernach Doppelwurzeln; man erkennt auch sofort, daß die Geraden $y = a$ und $x = a$ die Kurve in drei zusammenfallenden Punkten schneiden, also Wendetangenten (s. Nr. 24) sind. Durch diese Berührungspunkte geht auch die gerade Polare (vgl. Satz II). Figur rechnen!

Beisp. 2. Weise allgemein nach, daß jede Polarkurve k^{ter} Ordnung in bezug auf eine »triangulär-symmetrische Kurve« $\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^m + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^m + \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^m = 0$ wieder eine solche in bezug auf dasselbe Fundamentaldreieck ist. Für $x_3 \equiv z$ werden die Kurven nach Lamé benannt. Für diese gilt natürlich derselbe Satz, wie man an Beisp. 1 sieht. Man stelle sich, um die zwei Typen der Laméschen Kurven zu erkennen, noch die Kurve $x^4 + y^4 = a^4$ her!

Beisp. 3. Zeige, daß die Tangentenpaare aus den Ecken des Fundamentaldreiecks an den Kegelschnitt

$$K \equiv a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + 2 a_{23} x_2 x_3 = 0$$

folgende Gleichungen haben:

$$A_{33} x_2^2 - 2 A_{23} x_2 x_3 + A_{22} x_3^2 = 0; \quad A_{11} x_3^2 - 2 A_{13} x_1 x_3 + A_{33} x_1^2 = 0;$$
$$A_{22} x_1^2 - 2 A_{12} x_1 x_2 + A_{11} x_2^2 = 0,$$

wo die A_{ik} die Unterdeterminanten der Determinante $\Delta \equiv (a_{11}\, a_{22}\, a_{33})$ des Kegelschnittes sind. — Hieraus kann man leicht die Bedingung ableiten dafür, daß drei Linienpaare aus den Koordinatenecken mit den Gleichungen

$$a x_2^2 + b x_2 x_3 + c x_3^2 = 0; \quad a' x_3^2 + b' x_1 x_3 + c' x_1^2 = 0;$$
$$a'' x_1^2 + b'' x_1 x_2 + c'' x_2^2 = 0$$

einen Kegelschnitt berühren. Man kann diese nur dann auf die obige Form bringen, wenn $\frac{c\,c'\,c''}{a\,a'\,a''} = 1$ ist.

§ 6. Allgemeinere Behandlung der Beziehung zwischen einer Kurve und einer Geraden, unter Zugrundelegung einer Kubik.

15. Die Gleichung (1*) [oder (1)], die uns in der vorigen Nummer schon sehr wichtige Aufschlüsse gab, wird uns noch auf eine Reihe von Fragen Antwort geben, wenn wir sie nur richtig zu behandeln verstehen. Zunächst bemerken wir, daß es uns in Nr. 14 doch wesentlich darum zu tun war, Bedingungen für ein Zusammenfallen zweier Schnittpunkte der Geraden PQ mit der Kurve aufzustellen und diese Bedingungen geometrisch zu deuten. Die Algebra gibt uns Mittel an die Hand, dieses Problem allgemeiner zu lösen. *Gleichung* (1) *hat zwei zusammenfallende Wurzeln, wenn ihre Diskriminante* Δ *verschwindet.* Das allgemeine Bildungsgesetz von Δ ist freilich noch nicht so klar, daß es möglich wäre, Δ für eine beliebige Gleichung n^{ten} Grades in geschlossener Form anzugeben; doch finden sich für Gleichungen 3ten und 4ten Grades die Diskriminanten in jedem Lehrbuch der Algebra. Wir wollen deshalb, zugleich um die obige allgemeine Theorie zu illustrieren, im folgenden eine Kubik zugrunde legen.

Sei $f = 0$ die Gleichung dieser Kurve dritter Ordnung, so können wir die Gleichung (1) mit Benutzung von (2) folgendermaßen schreiben:

$$\lambda^3 f^x + \lambda^2\mu\, \varDelta_y (f^x) + \lambda\, \mu^2\, \varDelta_x (f^y) + \mu^3 f^y = 0\,, \tag{6}$$

oder noch kürzer

$$\lambda^3 f^x + \lambda^2\, \mu\, \varDelta_y + \lambda\, \mu^2\, \varDelta_x + \mu^3 f^y = 0\,. \tag{6*}$$

Für eine kubische Gleichung $a_0\, x^3 + a_1\, x^2 + a_2\, x + a_3 = 0$ ist nun

$$\Delta \equiv a_1^2\, a_2^2 - 4\, a_0\, a_2^3 + 18\, a_0\, a_1\, a_2\, a_3 - 4\, a_1^3\, a_3 - 27\, a_0^2\, a_3^2\,,$$

was für (6*) nach einiger Reduktion ergibt:

$$\left\{ \begin{aligned} &(\varDelta_x)^2\, [(\varDelta_y)^2 - 4\, f^x\, \varDelta_x] + f^y\, [18\, f^x\, \varDelta_x\, \varDelta_y - 4\, (\varDelta_y)^3 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad - 27\, (f^x)^2 f^y] = 0\,, \end{aligned} \right. \tag{7}$$

eine Bedingungsgleichung in x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3, homogen von der 6ten Dimension in bezug auf jede Reihe von Variablen, wie eine einfache Abzählung zeigt. In derselben ist auch x mit y, wie zu erwarten war, vertauschbar, d. h. sie kann ebensogut in der Form geschrieben werden:

$$(7^*) \quad \begin{cases} (\varDelta_y)^2 [(\varDelta_x)^2 - 4 f^y \varDelta_y] + f^x [18 f^y \varDelta_x \varDelta_y - 4 (\varDelta_x)^3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - 27 (f^y)^2 f^x] = 0 . \end{cases}$$

Der Leser beachte, daß dies, algebraisch betrachtet, eine selbstverständliche Folge davon ist, daß Δ in bezug auf a_1, a_2 und a_0, a_3 symmetrisch gebaut ist. Auch dies leuchtet wiederum ohne weiteres ein, wenn man die kubische Gleichung homogen schreibt, und in der Theorie der Formen wird sie auch nie anders betrachtet.

16. Daß (7) vom 6ten Grad in bezug auf die Variablen jeder Gattung ist, sagt uns nur, daß die allgemeine Kubik von der 6ten Klasse ist, was schon aus Formel (5) folgt. Erteilen wir etwa den x_i feste Werte, so gibt (7) eine Kurve 6ter Ordg. in den y_i, die aber in die 6 Tangenten von (x) an die Kurve zerfallen muß. Denn sie gibt alle Punkte, die mit (x) verbunden Gerade liefern, welche die Kurve berühren. Auch über die Lage dieses Tangentensextupels in bezug auf die Kubik gibt uns Gleichung (7) näheren Aufschluß, da sie bereits in der Büschel-Form geschrieben ist (s. Nr. 12). Wir sehen so, daß die Kurve (7) durch die Schnittpunkte von $f^y = 0$ mit $\mathsf{K}_1 \equiv (\varDelta_y)^2 - 4 f^x \varDelta_x = 0$ und durch die Schnittpunkte von $f^y = 0$ mit $\mathsf{K}_2^2 \equiv (\varDelta_x)^2 = 0$ geht. K_2 ist nun aber nichts anderes als der Polarkegelschnitt (= erste Polare) des Punktes (x). Legen wir diesen doppelt, indem wir zuerst zwei sehr nahe Kegelschnitte zeichnen und diese zusammenrücken lassen (in Fig. 2, S. 35, ist dies durch P angedeutet) so erkennen wir, daß die Kurve (7) die gegebene Kubik überall dort berührt, wo der Polarkegelschnitt schneidet[19]), was aus Nr. 14 schon bekannt ist. Wir sehen aber weiter, daß auch die übrigen $6 \cdot 3 - 6 \cdot 2 = 6$ Schnittpunkte des Tangentensextupels mit der gegebenen Kubik in einem Kegelschnitt K_1 liegen, dessen Form uns nach dem eben

---

[19]) Für die allgemeine Form $F + \lambda f^2 = 0$ folgt hieraus, daß diese Gleichung ein Büschel von Kurven darstellt, die alle F in den Punkten berühren, wo F von f geschnitten wird.

Gesagten sofort zeigt, daß er mit dem Polarkegelschnitt Δ_x in dessen Schnittpunkten mit der Polargeraden Δ_y eine doppelte Berührung hat. Auch gibt uns die Form (7*) sofort eine rechnerische Bestätigung der Bem. 2 in Nr. 14. Denn wenn (x) auf der Kurve liegt $(f^x = 0)$, so spaltet sich die Tangente (= Polargerade) Δ_y doppelt ab.

17. Gleichung (7) gibt uns aber, genau betrachtet, noch weit mehr. Denn in ihr ist die Bedingung dargestellt, daß eine Gerade die gegebene Kurve berühre: *das ist nichts anderes als die Gleichung der Kurve in Linienkoordinaten.* Es müßte uns nur gelingen, die Koordinaten u_i der Verbindungslinie PQ wirklich einzuführen. Sei die Gleichung von PQ (mit ξ_i als laufenden Punktkoordinaten):

$$u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3 \equiv \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0\,,$$

so ist offenbar:

$$u_1 : u_2 : u_3 = (x_2 y_3 - x_3 y_2) : (x_3 y_1 - x_1 y_3) : (x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

und wir müßten (7) so ordnen, daß es als Funktion dieser drei Klammergrößen erschiene. Dies ist in der Tat möglich und es gelingt auf Grund dieses Gedankenganges vermittels des sog. »Übertragungsprinzipes« (Clebsch), die Linienkoordinatengleichung bes. der Kurven 3ter und 4ter Ordg. ganz allgemein in elegantester Weise aufzustellen. Freilich ist dazu eine von Aronhold eingeführte, von Clebsch und Gordan besonders ausgebaute, weitgehende Symbolik nötig, welche die ganze Formentheorie beherrscht, die wir aber nicht voraussetzen. Wir müssen vielmehr in dieser Beziehung den Leser, der tiefer zu dringen wünscht, auf das Werk von Clebsch-Lindemann verweisen. Nur über den Namen »Übertragungsprinzip« sei uns gestattet, eine Erläuterung zu geben[19a]).

Wir können in Gleichung (6) λ, μ als (binäre) Koordinaten der Schnittpunkte S der Geraden PQ mit der Kurve auffassen. Dann ist (6) nichts anderes als die Gleichung dieser n Punkte, bezogen auf die Grundpunkte P und Q. Besteht zwischen diesen Punkten irgend eine invariante

[19a]) Vgl. auch Nr. 123, Zusatz.

Beziehung, so wird dies durch das Verschwinden einer Invariante $\mathfrak{J}$ angezeigt werden. Stellt man diese Invariante symbolisch dar, so ist es sehr leicht, die in derselben auftretenden Koordinaten x, y der Grundpunkte durch die Koordinaten ihrer Verbindungslinie zu ersetzen und aus der binären Invariante wird ohne weiteres eine ternäre Gleichung in Linienkoordinaten, die eine Kurve angibt, deren sämtliche Tangenten die invariante Bedingung erfüllen. So ist die invariante Beziehung vom binären ins ternäre Gebiet »übertragen«.

Wir werden weiter unten (Nr. 25) ein anderes Verfahren angeben, von Punkt- zu Linienkoordinaten überzugehen, das in praktischen Fällen meist ausreicht, wollen aber zuvor noch an Gleichung (1*) eine andere Bemerkung anknüpfen.

§ 7. Harmonische Mittelpunkte. Der k-fache Punkt. Einfluß der gewöhnlichen Singularitäten auf die Klasse.

18. In Nr. 14 ließen wir das erste Glied der Gleichung (1*) verschwinden und fragten, was dies bedeute. Dies wollen wir nun mit einem beliebigen Glied der Gleichung, z. B. mit dem zweiten Glied tun und setzen $\Delta_x(f^y) = 0$. Nach der Theorie der Gleichungen bedeutet dies nichts anderes, als daß die Summe der Wurzeln $\Sigma\lambda/\mu = 0$ ist. Führt man hier für λ/μ die betr. Streckenverhältnisse ein, so erhält man

$$\sum \frac{PS}{QS} = \frac{PS_1}{QS_1} + \frac{PS_2}{QS_2} + \dots + \frac{PS_n}{QS_n} = 0\,,$$

und da $PS_i = QP - QS_i$, nach einer kleinen Umformung

$$\frac{1}{QS_1} + \frac{1}{QS_2} + \dots + \frac{1}{QS_n} = \frac{n}{QP}\,. \tag{8}$$

Hält man also Q fest, so liegt P bei vorstehender Bedingung (8) auf der Polargeraden von $Q : \Delta_x(f^y) = 0$; das gibt den Satz von Cotes (1722):

VI. *Der Ort der »harmonischen Mittelpunkte P« für alle Schnittpunkte der Geraden eines Büschels durch einen festen Punkt Q ist die Polargerade von Q.*

Nennt man »harmonischen Mittelpunkt k^{ten} Grades« (DE JONQUIÈRES 1857) einen Punkt P, der die Gleichung erfüllt:

$$\sum \frac{PS_1}{QS_1} \cdot \frac{PS_2}{QS_2} \cdot \ldots \cdot \frac{PS_k}{QS_k} = 0\,,$$

so wird man allgemeiner sagen können, daß die harmonischen Mittelpunkte k^{ten} Grades die Polare k^{ter} Ordg. erfüllen, und es ist damit das Verschwinden des $(k+1)^{ten}$ Gliedes in Gleichung (1*) geometrisch gedeutet. Bezüglich weiterer Ausführungen zu diesem Gegenstand sei auf CREMONA (L. V.) verwiesen, der seine Kurventheorie auf die Theorie der harmonischen Mittelpunkte aufgebaut hat.

Ist der Pol Q unendlich fern, so heißt man P das »Zentrum der mittleren Entfernungen« und die verschiedenen Polaren Durchmesser[18].

Beisp. 1. Ist die Grundkurve 2. Ordnung, so gibt es überhaupt nur eine Polargerade und diese ist der geometrische Ort für alle Punkte P, die zu Q und S_1, S_2 harmonisch liegen.

Beisp. 2. Legen wir durch einen Punkt $Q(y_1, y_2, y_3)$ einer Kubik $(f^y = 0)$ und einen beliebigen Punkt P eine Gerade, so werden die zwei übrigen Schnittpunkte S_1, S_2 dieser Geraden mit der Kurve durch die beiden Werte λ/μ bestimmt, die der Gleichung [s. Nr. 15 (6)] genügen

$$\lambda^2 f^x + \lambda\,\mu\,\Delta_y\,(f^x) + \mu^2\,\Delta_x\,(f^y) = 0\,.$$

Nehmen wir nun Punkt P so an, daß er auf der konischen Polare von Q liegt $[\Delta_y(f^x) = 0]$, so hat die vorige Gleichung zwei Wurzeln λ/μ, die sich nur durch das Zeichen unterscheiden, d. h. P liegt harmonisch zu Q, S_1, S_2. Man sieht auch unmittelbar ein, daß, da

$$\frac{PS_1}{QS_1} + \frac{PS_2}{QS_2} = 0\,,$$

die Proportion besteht $PS_1 : QS_1 = -(PS_2 : QS_2)$, welche die harmonische Lage direkt anzeigt. Wir können dies in den Satz zusammenfassen, der eine Analogie zu dem von Beisp. 1 bildet:

Der geometrische Ort für alle Punkte P, die harmonisch liegen zu einem Punkte Q einer Kubik und den beiden übrigen Schnittpunkten S_1 und S_2 einer durch Q gelegten Geraden ist der Polarkegelschnitt von Q.

19. Wir wollen aber noch den Fall etwas genauer betrachten, wo der Pol Q in einer Ecke des Fundamentaldreiecks z. B. $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$ liegt. Schreibt man dann die Polare k^{ter} Ordnung $\mathsf{P}^{(k)}$ in der Form $\Delta_y^{n-k}(f^x) = 0$, so ist sofort ersichtlich, daß alle Glieder verschwinden bis auf $\dfrac{\partial^{n-k} f^x}{\partial x^{n-k}}$.

Ist $f \equiv u^{(0)} x_3^n + u^{(1)} x_3^{n-1} + \ldots + u^{(n)} = 0$, so wird demnach

$$\mathsf{P}^{(k)} \equiv \frac{n!}{k!} u^{(0)} x_3^k + \frac{(n-1)!}{(k-1)!} u^{(1)} x_3^{k-1} + \ldots$$
$$+ \frac{(n-k+1)!}{1} u^{(k-1)} x_3 + (n-k)!\, u^{(k)} = 0\,.$$

Geht nun die Kurve durch die betreffende Ecke, ist also $u^{(0)} = 0$, so wird $u^{(1)} = 0$ zur Gleichung der Polargeraden (= Tangente) in diesem Punkt. Fehlt auch das Glied mit $u^{(1)}$, so wird die Polargerade unbestimmt und wir erhalten als Polarkegelschnitt des Punktes $u^{(2)} = 0$, der, da er durch eine homogene Gleichung zweier Variablen dargestellt wird, in zwei Gerade durch diesen Punkt zerfällt. Nach Nr. 14 muß jede dieser beiden Geraden die Kurve in dem Pol berühren, da keine derselben ausgezeichnet sein kann, und es geht somit die Kurve in diesem Falle in zwei verschiedenen Richtungen durch den Punkt hindurch: sie hat dort einen »*Doppelpunkt*«. Sind ferner alle $u^{(i)} = 0$ für $i = 0, 1, 2, \ldots k-1$, so hat erst die Polare k^{ter} Ordg. einen bestimmten Sinn und zerfällt in k Gerade. Wir können demnach allgemein sagen:

VII. *Fehlen in einer Gleichung alle Glieder mit $x_3^i\,(i > n-k)$, so daß in der nach x_3 geordneten Gleichung das höchste Glied $u^{(k)} x_3^{n-k}$ ist, so hat die Kurve in der Ecke $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ einen k-fachen Punkt, dessen Tangenten durch $u^{(k)} = 0$ gegeben sind.*

Sind zwei der linearen Faktoren von $u^{(k)}$ gleich, so berühren sich zwei der Kurvenzweige des k-fachen Punktes. Im Falle des Doppelpunktes entsteht dann die »*Spitze*«.

Bem. Hat eine n-ik einen n-fachen Punkt, so kann ihre Gleichung nur lauten: $u^{(n)} = 0$ und die Kurve besteht aus n Geraden durch diesen Punkt. Eine eigentliche n-ik kann demnach

höchstens einen $(n-1)$-fachen Punkt besitzen. Daß sie dann außerdem keinen vielfachen Punkt mehr besitzen kann, erkennt man leicht, wenn man bedenkt, daß eine Gerade durch den $(n-1)$-fachen Punkt und einen ev. Doppelpunkt $n+1$ Schnittpunkte mit der Kurve gemein hätte.

Aufgabe 1. Beweise Satz VII für $x_3 \equiv z$ durch Einführung von Polarkoordinaten!

Aufgabe 2. Gib die allgemeine Gleichung einer Quartik an, die in den drei Koordinatenecken Doppelpunkte hat!

Aufgabe 3. Zeige, daß die Quartik

$$x^2 y^2 - 2\,a\,x\,y\,(x+y) + a^2\,(x-y)^2 = 0$$

im Anfangspunkt und in den unendlich fernen Punkten der Achsen Spitzen hat! Die drei betr. Tangenten schneiden sich im Punkte $x = a,\ y = a$.

20. Für die Folge ist es für uns von besonderer Wichtigkeit, über das Verhalten der Polaren, besonders der ersten Polaren in einem Doppelpunkt, einer Spitze usw. im klaren zu sein. Wir betrachten deshalb nochmals eine Kurve mit k-fachem Punkt in der Ecke III, setzen also

$$f \equiv u^{(k)}\,x_3^{n-k} + u^{(k+1)}\,x_3^{n-k-1} + \ldots + u^{(n)} = 0\,.$$

Bilden wir nun die Polaren irgend einer i^{ten} Ordg. in bezug auf einen beliebigen Punkt, so wird in einer solchen, solange $n - i < k$ [oder $i > n-k$] immer noch ein Glied mit $u^{(l)}\,x_3^{n-k}$ vorkommen und die betr. Ecke ist ein $l = \{k-(n-i)\}$-facher Punkt der Polare.

Die Polare i^{ter} Ordg. für die Ecke III selbst hat dort unter denselben Bedingungen auch einen k-fachen Punkt mit den nämlichen Tangenten.

Spezielle Fälle. **a)** Für $k = n - \theta$ ist $l = i - \theta$. — **b)** Für $k = 2$ (Doppelpunkt) geht nur die erste Polare und zwar einfach hindurch; dies zählt, da im Doppelpunkt zwei verschiedene Zweige geschnitten werden, für zwei Schnittpunkte, wie man durch eine geringe Verschiebung der Polarkurve erkennt. — **c)** In einem dreifachen Punkt hat die erste Polare einen Doppelpunkt; dieser Punkt zählt für $2 \cdot 3 = 6$ Schnittpunkte der beiden Kurven, da jeder Zug der einen Kurve jeden Zug der andern schneidet. Der dreifache Punkt kann demnach 3 Doppelpunkten gleich gerechnet werden. Man sieht dies am besten, wenn man die drei Richtungen, in denen die Kurve durch den Punkt geht,

durch 3 Tangenten eines kleinen Kreises angibt und den Kreis auf einen Punkt zusammenschrumpfen läßt. Dann ist der dreifache Punkt die Grenze der drei durch die drei Tangenten gebildeten Doppelpunkte. Aus demselben Grunde kann der k-fache Punkt $\frac{1}{2}k(k-1)$ Doppelpunkten äquivalent gesetzt werden. — **d)** Hat $u^{(k)}$ zwei gleiche Faktoren, so enthält $u^{(l=k-1)}$ den fraglichen Faktor immer noch in der ersten Potenz, d. h. die erste Polare schickt einen Zweig, der die Kurve berührt, durch den k-fachen Punkt; dies entspricht im allgemeinen einer Vermehrung um einen Schnittpunkt.

21. Auf Grund des Vorhergehenden wird der Leser nunmehr leicht einsehen, daß die Formel (5), die wir für die Klasse einer allgemeinen n-ik aufstellten, für Kurven mit Doppelpunkten und Spitzen einer Modifikation bedarf. Denn um die Anzahl der Tangenten von einem beliebigen Punkte P aus anzugeben, zählten wir die Schnittpunkte der ersten Polare mit der Kurve. Die erste Polare geht aber durch einen Doppelpunkt D, und wir werden die Linie PD als »uneigentliche« Tangente doppeltzählend in Abzug bringen müssen; »uneigentlich« deshalb, weil PD wohl in zwei unendlich nahen (koinzidierenden) Punkten schneidet, die aber auf der Kurve nicht konsekutiv sind (vgl. die Fig. 2 auf S. 35). Für eine Spitze R müssen wir nach Nr. 20 d) PR sogar dreifach rechnen. Daher der Satz:

Hat eine Kurve d Doppelpunkte und r Spitzen, so ist ihre ***Klasse***

$$\text{(I)} \qquad \nu = n(n-1) - 2d - 3r\,.$$

Bem. Liegt P auf der Kurve selbst, so gehen von P außer der Tangente in P noch $\nu - 2$ Tangenten an die Kurve; ist P selbst ein Doppelpunkt, nur $\nu - 4$ und, wenn P in einer Spitze liegt, $\nu - 3$ Tangenten.

§ 8. Allgemeine Bedingungen für einen Doppelpunkt. Betrachtungen über das Wesen der gewöhnlichen Singularitäten, besonders mit Rücksicht auf die Dualität.

22. Es liegt uns noch ob, ein allgemeines Kriterium für einen Doppelpunkt anzugeben. Zu diesem Zweck müssen wir wieder auf Gleichung (1*), S. 18, zurückgreifen. Soll der

Punkt Q ein Doppelpunkt sein, PQ also in Q zwei zusammenfallende Schnittpunkte haben, wo auch P liege, so muß außer $f^y = 0$ noch

$$\varDelta_x(f^y) \equiv x_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^y + x_2\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^y + x_3\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^y = 0$$

sein für jede Kombination x_1, x_2, x_3. Demnach müssen die Koordinaten y_i des Doppelpunktes jeder der drei Bedingungen genügen

$$(9) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^y = 0\,; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^y = 0\,; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^y = 0\,.$$

Geometrisch besagen diese drei Gleichungen nur, was uns schon bekannt ist (s. Nr. 19), daß nämlich die Tangente im Doppelpunkt unbestimmt wird. Die Gleichungen (9) sind übrigens durchaus hinreichend für die Existenz eines Doppelpunktes im Punkte (y), da ihr Zusammenbestehen wegen des EULERschen Theorems (s. Nr. 14) die Gleichung $f^y = 0$ mitbedingt.

Das Tangentenpaar des Doppelpunktes ist dann mit der konischen Polare von (y) identisch und lautet:

$$\varDelta_x^2(f^y) \equiv \left[x_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^y + x_2\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^y + x_3\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^y\right]^2$$
$$= x_1^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)^y + 2\,x_1 x_2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^y + x_2^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right)^y$$
$$+ 2\,x_1 x_3\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_3}\right)^y + \ldots = 0.$$

Es ist einleuchtend, daß sich die Gleichung desselben bei Anwendung nicht homogener Koordinaten $x, y, 1$ für x_1, x_2, x_3 und $x', y', 1$ für y_1, y_2, y_3 in der Form muß schreiben lassen

$$(x - x')^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]_{x=x'} + 2(x - x')(y - y')\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right]_{\substack{x=x'\\ y=y'}}$$
$$+ (y - y')^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]_{y=y'} = 0\,.$$

Die direkte Transformation auf diese Form würde allerdings viel Raum kosten. Der Leser möge sich, unter beständiger

Anwendung des EULERschen Theorems, an derselben selbst versuchen. Ein Beispiel für die Anwendung der letzteren Form findet derselbe in der Bem. von Nr. 140.

Der Doppelpunkt ist ein »Knoten« (= Selbstschnitt), oder ein »isolierter Punkt«, je nachdem die Zerlegung dieser quadratischen Form in zwei lineare reell ausführbar ist oder nicht. Dazwischen liegt der Fall der Spitze, wo die Form zu einem reinen Quadrat wird (Doppelgerade). Die Zerlegung für die allgemeine Gleichung anzugeben, lohnt nicht recht, da man es in einem konkreten Falle doch immer vorziehen wird, nachdem die Koordinaten des Doppelpunktes aus (9) bestimmt sind, diesen in eine Koordinatenecke etwa $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ zu legen. Dann wird nämlich die Kurvengleichung von der Form

$$f \equiv (a x_1^2 + b x_1 x_2 + c x_2^2) \cdot x_3^{n-2} + \Phi = 0\,,$$

und der betreffende Punkt ist

$$\left.\begin{array}{l}\text{Knoten,}\\ \text{Spitze,}\\ \text{Isolierter Punkt,}\end{array}\right\} \text{ wenn } b^2 - 4ac \left\{\begin{array}{l} > 0\\ = 0\\ < 0\,.\end{array}\right.$$

Beisp. 1. Das einfachste Beispiel eines Knotens bildet das Linienpaar selbst. Hat ein Kegelschnitt die Gleichung

$$\mathsf{K} \equiv a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + 2 a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3^2 = 0$$

und gibt es einen Punkt (y), für welchen

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathsf{K}}{\partial x_1}\right)^y \equiv a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 = 0\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathsf{K}}{\partial x_2}\right)^y \equiv a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3 = 0\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathsf{K}}{\partial x_3}\right)^y \equiv a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33} y_3 = 0\,,\end{array}\right\} (a_{ik} = a_{ki})$$

so zerfällt K in ein Linienpaar durch den Punkt (y). Eliminiert man aus den drei Bedingungsgleichungen die Variablen, so erhält man einen Koeffizientenausdruck

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\,,$$

dessen Verschwinden eben die Bedingung eines Doppelpunktes ist. Δ heißt in einem erweiterten Sinne auch hier die »Diskriminante« von K. Analoges gilt für höhere Kurven.

Betrachtet man K als Funktion einer Variablen, etwa x_1, so erhält man leicht auch die Bedingung für eine Doppelgerade, indem man die Gleichung nach x_1 löst und den Ausdruck unter der Quadratwurzel, der im engeren Sinn eine Diskriminante ist, identisch Null setzt. Es müssen dann die Koeffizienten von $x_2^2, x_2 x_3, x_3^2$ in dem Ausdruck

$$(a_{12}x_2 + a_{13}x_3)^2 - a_{11}(a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2)$$

einzeln verschwinden, oder

I) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$; II) $a_{13}^2 - a_{11}a_{33} = 0$; III) $a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23} = 0$ sein. Aus III) erhält man vermittels der beiden andern leicht die diesen analog gebildete III*) $a_{23}^2 - a_{22}a_{33} = 0$ und es ist auch nicht schwer zu zeigen, daß bei $\Delta = 0$ eine einzige der 3 Bedingungen die andern zwei zur Folge hat. (Anwendung auf den Fall der Spitze!)

Beisp. 2. Zeige, daß eine Kurve, deren Gleichung die Form hat:

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 = 0,$$

wo u, v, A, B, C beliebige Funktionen sind, in allen Schnittpunkten von $u = 0$ und $v = 0$ Doppelpunkte besitzt. Sind u und v lineare Funktionen, so sind die Tangenten des Doppelpunkts durch

$$A'u^2 + 2B'uv + C'v^2 = 0$$

gegeben, wo A', B', C' die Substitutionsresultate der Doppelpunkts-Koordinaten in A, B, C sind.

23. Bevor wir weiterschreiten, ist es nötig, auf die Natur der Besonderheiten, die uns an den Kurven aufstießen und die man gemeinhin »Singularitäten« nennt, etwas näher einzugehen. Dabei ist es wesentlich, ob man die Kurve als Punkt- oder Tangentengebilde auffaßt. Wenn wir die Polarentheorie lediglich aus dem ersteren Gesichtspunkt behandelten, so folgten wir dem Gange der historischen Entwicklung sowohl wie dem allgemeinen Gebrauche, die in den uns geläufigeren Punktkoordinaten gewonnenen Resultate erst nachher, soweit nötig, ins Dualistische zu übertragen. Wir merken in betreff der allgemeinen Behandlung der ganzen Polarentheorie in Linienkoordinaten nur an, daß wir für jede Gerade als Polgerade ein System von Klassenkurven als Polaren erhalten würden. Die »lineare« Polare einer Geraden G wäre hier ein Punkt (wenn G Tangente ist, der Berührungspunkt) und wir würden so, in scheinbarem Gegensatz zu Nr. 13, IV, für jede

Gerade einen einzigen Pol erhalten. In demselben Sinne würde jede Kurve einen »Mittelpunkt« haben, den Pol der unendlichfernen Geraden. Es liegt jedoch nicht in unserer Absicht, näher auf diese Dinge einzugehen, besonders da hierüber noch gar keine Untersuchungen vorliegen. Wir wollen vielmehr gleich, wie oben angekündigt, die Singularitäten nebst ihren dualistischen Gegenstücken näher ins Auge fassen.

Der Doppelpunkt entsteht offenbar dadurch, daß der Punkt, den wir die Kurve beschreibend uns vorstellen, über einen Ort hinweg geht, den er schon passiert hatte. Zwei Punkte der Kurve »koinzidieren«. Beim isolierten Doppelpunkt sind die Kurvenzüge nur imaginär zu denken. Daß der Doppelpunkt eine Singularität im eigentlichen Sinne ist, zeigt sich in dem Auftreten einer Bedingungsgleichung $\Delta = 0$ für die Koeffizienten der allgemeinen Ordnungskurve. Betrachten wir jedoch die Kurve als durch die Tangenten erzeugt, so erscheint der Doppelpunkt als ein ganz natürliches Vorkommnis. Denn die beschreibende Tangente wird durch den Selbstschnitt eines Kurvenzuges in ihrer stetigen Drehung nicht gestört. Für eine Klassenkurve ist vielmehr die dem Doppelpunkt entsprechende Singularität die »Doppeltangente«, d. h. eine Tangente, die die Kurve in zwei verschiedenen Punkten berührt (vgl. das Beisp. von Nr. 24a). Andrerseits sind Doppeltangenten für Ordnungskurven natürliche Vorkommnisse. Es koinzidieren eben zwei einfache Tangenten. Auch die Doppeltangente kann isoliert sein, wenn ihre Berührungspunkte konjugiert imaginär sind.

24. Da jedoch jede vorgelegte Kurve sowohl als Punkt- wie als Tangentengebilde aufgefaßt werden kann, ist es gut, wie dies PLÜCKER[20]) zuerst getan hat, beide Auffassungen zu verschmelzen. *Die Kurve entsteht dann, indem auf einer Geraden ein Punkt stetig fortrückt, während die Gerade selbst sich stetig um diesen Punkt dreht.* Bei dieser Auffassung werden die Tangenten der Kurve durch die Verbindungslinien aufeinanderfolgender (»konsekutiver«) Punkte, die Punkte der Kurve durch die Schnittpunkte konsekutiver Geraden gebildet. Eine Singularität »im engeren Sinn« entsteht nur dann, wenn entweder die

[20]) *Algebraische Kurven* (L. V.) S. 200 ff.

stetige Fortbewegung des Punktes oder der geraden Linie eine Unterbrechung erleidet oder beides zugleich eintritt.

Erreicht etwa der Punkt eine Grenzlage und geht dann im entgegengesetzten Sinne weiter, während die Gerade sich kontinuierlich nach der nämlichen Richtung dreht, so entsteht offenbar eine Spitze (= Rückkehrpunkt oder stationärer Punkt). Hier koinzidiert ein Punkt mit seinem konsekutiven. *Demnach ist die Spitze (wie der Doppelpunkt) eine Singularität im eigentlichen Sinne nur für Ordnungskurven, ein gewöhnliches Vorkommnis für Klassenkurven.*

Bleibt aber die Gerade bei ihrer kontinuierlichen Drehung stehen, um sich dann im entgegengesetzten Sinne weiter zu drehen, während der Punkt in derselben Richtung auf ihr fortrückt, so entsteht als zur Spitze dualistische Singularität die »Wendetangente« (= stationäre Tangente). Eine Tangente wird mit ihrer konsekutiven koinzident. *Die Wendetangente ist demnach eine eigentliche Singularität nur für Klassenkurven, ein gewöhnliches Vorkommnis für Ordnungskurven.* Die Wendetangente steht zwischen der reell berührenden und der isolierten Doppeltangente ebenso in der Mitte wie die Spitze zwischen Knoten und isoliertem Punkt. Aus der Differenzialrechnung ist als Bedingung für die Berührungspunkte der Wendetangenten, die nicht ganz konsequent »Wendepunkte« heißen, bekannt, daß $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ sei. Offenbar ist dies keine Bedingung für die Koeffizienten, woraus ebenfalls hervorgeht, daß Wendetangenten jeder Ordnungskurve eigentümlich sind.

Es ist auch nach der besprochenen Entstehung dieser »notwendigen« Singularitäten nicht schwer sich vorzustellen, daß die Wendetangente drei konsekutive Punkte mit der Kurve gemein hat und daß durch die Spitze drei konsekutive Tangenten laufen. Ein gleichzeitiges Umkehren von Punkt und Gerade würde schon eine »höhere« Singularität (die Spitze zweiter Art oder Schnabelspitze) erzeugen, worüber man Abschnitt VII vergleiche.

Bem. Aus obigem geht hervor, daß Kurven mit Doppelpunkt mindestens 4. Klasse, Kurven mit Doppeltangente mindestens 4. Ordg. sein müssen, während die Spitze und die Wendetangente schon bei Kurven 3. Klasse bez. 3. Ordg. auftreten können.

24a. Nach diesen Bemerkungen wird es ohne weiteres klar sein, daß wir die Ordnung n einer Kurve ν^{ter} Klasse mit δ Doppeltangenten und ϱ Wendetangenten durch eine der Formel (I) in Nr. 21 durchaus reziproke Formel erhalten werden. Es ist nämlich

$$\text{(I*)} \qquad n = \nu(\nu - 1) - 2\delta - 3\varrho\,.$$

Diese Formel, die auf unserem Standpunkte sozusagen eine Selbstverständlichkeit ist, löst das sogenannte PONCELETsche Paradoxon. Nachdem durch PONCELET festgestellt war, daß $\nu = n(n-1)$, sollte infolge des Dualitätsprinzips auch

$$n = \nu(\nu - 1) = n(n-1)[n(n-1) - 1]$$

sein, was aber in jedem Falle ($n = \nu = 2$ ausgenommen) eine viel höhere Zahl gibt[21]). Erst PLÜCKER stellte fest, *daß die allgemeine Ordnungskurve immer eine mit Singularitäten behaftete Klassenkurve ist und umgekehrt.* Es liegt uns nur noch ob, die Zahlen δ und ϱ direkt aus n zu bestimmen, was im nächsten Abschnitt geschehen wird. Doch zuvor ist es nötig, unsere obigen Ausführungen durch den tatsächlichen Verhältnissen entsprechende Figuren zu unterstützen.

Fig. 2.

Beisp. Die einfachste Kurve, bei der ein Doppelpunkt möglich ist, ist eine Kubik, deren Klasse infolgedessen statt 6 nur 4 wird (C_3^4). Ihre Gestalt ist, bei nur einer Asymptote A (s. Abschnitt VI) die der Fig. 2, Kurve *1*. Den Knoten der Kurve können wir »auflösen« (PLÜCKER), indem wir in der Gleichung der Kurve eine geringe Konstantenänderung vor-

[21]) GERGONNE glaubte anfangs, bei jeder Kurve sei n und ν dieselbe Zahl, was uns allerdings heute ganz unbegreiflich erscheint.

nehmen (s. Nr. 53), so daß entweder die Kurve *2* (einteilige Form) oder *2'* (zweiteilige Form) entsteht. In jedem Falle läßt man die neue Kurve ganz nahe an der alten verlaufen, ohne diese zu überschreiten. Die Form *2* entsteht, wie man sich ausdrückt, durch »Verbinden« am Knoten, die Form *2'* durch »Trennen«. Die letztere besteht aus einem unendlichen Ast (»Serpentine«) mit drei reellen Wendepunkten und einem »Oval«. Zieht sich das Oval auf einen Punkt zusammen, so haben wir die Form mit isoliertem Punkt. Bei weiterer Änderung verschwindet auch dieser und wir erhalten die Form von *2* (Serpentine allein), die man sich

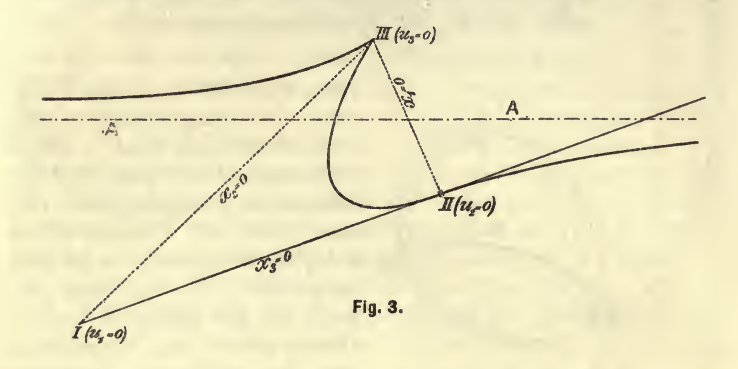


Fig. 3.

bei fortdauernder Dehnung und Abflachung in eine Gerade (etwa die Asymptote A) übergehend denken kann. Von Wichtigkeit ist hier die Beobachtung, daß bei jeder Art der Lösung des Knotens 2 (reelle) Wendepunkte gewonnen werden. — Die Kurve mit Spitze, deren Entstehung aus der Form mit Knoten man sich wohl leicht vorstellt, hat die Klasse 3 (s. Fig. 3).

Die dualistisch entsprechende Kurve zur obigen C_3^4 ist eine C_4^3 mit einer Doppeltangente und einer reellen Spitze[22])

[22]) Dem Anfänger ist sehr zu empfehlen, diese Kurve dadurch sich selbst zu konstruieren, daß er obige C_3^4 in bezug auf irgend einen Kegelschnitt (Kreis) »polarisiert«, d. h. zu jedem Punkt der Kurve die Polare sucht, oder was zeichnerisch viel besser, für das Resultat aber, eben der Dualität wegen, gleichgültig ist, zu jeder Tangente den Pol; dann durchläuft der Pol die zu besprechende C_4^3. Nichts zeigt besser das dualistische Entsprechen der verschiedenen Singularitäten und besonders das uns doch zu Anfang recht fremde »Auflösen« einer Doppeltangente.

(Fig. 4 u. 4*, Kurve *1*). Die Auflösung der Doppeltangente, wieder in zwei Arten, zeigen die (schematischen) Figuren, die des Übereinandergreifens wegen hier getrennt wiedergegeben sind. In jedem Falle entstehen zwei weitere reelle Spitzen. Wir erhalten natürlich ebenso wie oben eine einteilige Form *2* und eine zweiteilige Form *2'*. Der Serpentine entspricht ein »Dreispitz«, dem Oval wieder ein solches, das den Dreispitz einschließt. Denn da die Tangente der Spitze schon dreifach zählt, kann von keiner Spitze an die

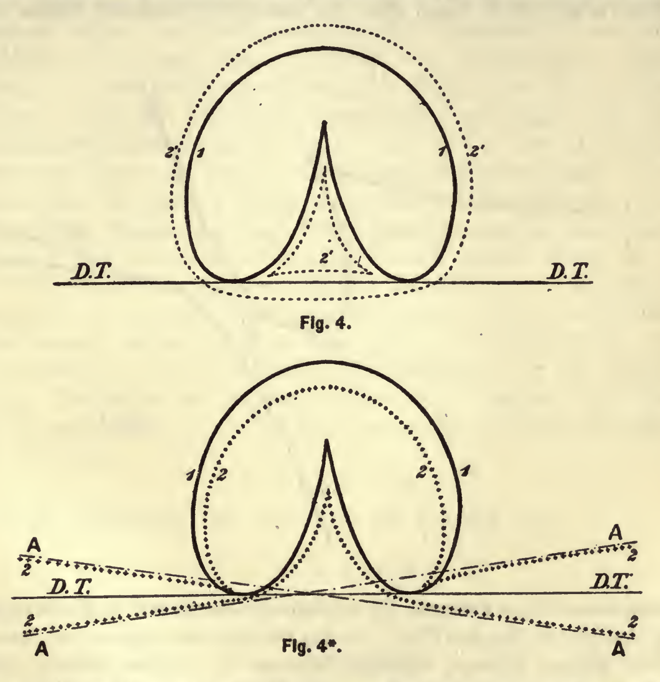


Fig. 4.

Fig. 4*.

Kurve (3. Klasse) eine weitere Tangente gehen, was offenbar der Fall wäre, wenn das Oval außerhalb läge. [Reziprok kann bei der Kurve 3. Ordg. keine Wendetangente das Oval schneiden.] Das Oval muß sich hier — dem isolierten Punkt entsprechend — auf eine isolierte Gerade (Doppeltangente) reduzieren lassen. Dieser Übergang ist durch die hyperbolische Form möglich. Projizieren wir das Oval so, daß es zwei reelle unendlich ferne Punkte erhält, so können wir die hyperbolischen Äste sich von der andern Seite immer mehr nähern lassen, und sie immer

mehr abflachen (den Asymptotenwinkel verkleinern), bis sie in eine Gerade zusammenfallen. Das ist dann die Form mit einer isolierten Doppeltangente. Bei weiterer Änderung verschwindet auch diese und wir erhalten wieder Form *2*, den Dreispitz allein, der aber eventuell ganz im Endlichen liegt. Der Dreispitz kann dann schließlich auf einen Punkt zusammenschrumpfen.

Wollen wir den Übergang von der Doppeltangente zur Wendetangente uns vorstellen, so bemerken wir gleich, daß die beiden Berührungspunkte nicht über die dazwischenliegende Spitze weg

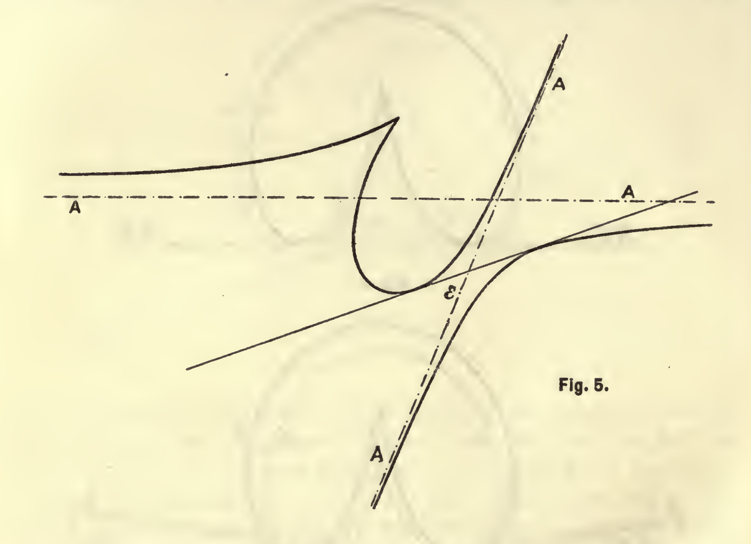


Fig. 5.

zusammenrücken können. Es ist deshalb besser, wir projizieren uns die Kurve *1* in die der Fig. 5, wo die Berührungspunkte nun immer näher rücken können, während offenbar $\sphericalangle\, \varepsilon$ immer kleiner wird. [Dieser entspricht dualistisch der Entfernung DD' in Fig. 2.] Wir erhalten so die zu sich selbst reziproke C_3^3 der Fig. 3, die nur mehr einmal durchs Unendliche geht.

Es ist sehr lehrreich, von dieser Figur ausgehend, die Wendetangente im entgegengesetzten Sinne aufzulösen. Man erhält dann Form *2'*, wobei das Oval von selbst hyperbolisch wird. Doch wollen wir dies, wie den damit in direktem Zusammenhang stehenden Übergang von Fig. 5 zu der Form mit isolierter Doppeltangente der Selbsttätigkeit des Lesers überlassen.

II. ÜBERGANG VON PUNKT- ZU LINIENKOORDINATEN.

§ 9. Aufstellung der Transformationsformeln.

25. Wir haben zwei Verpflichtungen dem Leser gegenüber, der uns bis hierher gefolgt ist. Die eine und nächstliegende wäre, nun auch wirklich die Wendepunkte aus der Punktkoordinatengleichung heraus zu bestimmen. Doch scheint es uns besser, zunächst die ältere von Nr. 17 einzulösen, und ein Verfahren anzugeben, wie man von der Punktkoordinatengleichung einer Kurve zu der Gleichung derselben Kurve in Linienkoordinaten übergehen kann. Der Leser, den die andere Frage mehr anzieht, mag jedoch ruhig einstweilen dieses Kapitel überschlagen, da es zum Verständnis des nächsten Abschnittes nicht gerade nötig ist.

Wenn wir an unsere Aufgabe herantreten, so vergegenwärtigen wir uns, daß die Gleichung einer Kurve in Linienkoordinaten nichts anderes ist, als eine Bedingung für die Koordinaten u_i einer Geraden, die bewirkt, daß die Gerade immer Tangente an unsere Kurve ist. Nennen wir den Berührungspunkt (y), so ist dazu nur nötig, daß die Gleichung der Geraden

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0$$

mit der Gleichung der Tangente im Punkte (y)

$$x_1 f_1^y + x_2 f_2^y + x_3 f_3^y = 0$$

identisch sei. Wir haben daher zu setzen:

$$(1) \quad \vartheta u_1 = f_1^y; \qquad (2) \quad \vartheta u_2 = f_2^y; \qquad (3) \quad \vartheta u_3 = f_3^y,$$

und noch die Bedingung zu stellen, daß (y) auf der Kurve liege:

$$(4) \qquad f^y = 0\,.$$

Nach dem Eulerschen Satz über homogene Funktionen ist aber, wenn die Gleichungen (1), (2), (3) bestehen, die Gleichung (4) ersetzbar durch die oft bequemere

$$(4^*) \qquad y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3 = 0\,,$$

und wir haben nun nur aus den Gleichungen (1), (2), (3) und (4) bez. (4*) die Variablen y_1, y_2, y_3 und den Proportionalitätsfaktor ϑ zu eliminieren. Das Resultat ist eine Gleichung

$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0,$$

die Gleichung der Kurve in Linienkoordinaten.

Beisp. 1. Für den Kegelschnitt (vgl. Nr. 22, Beisp. 1)

$$K \equiv \sum_1^3{}^i \sum{}^k a_{ik} x_i x_k = 0$$

ergibt sich mit Benützung von (4*) sofort als Gleichung in Linienkoordinaten die geränderte Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} \equiv \sum_1^3{}^i \sum{}^k A_{ik} u_i u_k = 0,$$

wo die A_{ik} die betr. Unterdeterminanten der Diskriminante Δ sind.

Beisp. 2. Es sei $f \equiv x_2^2 x_3 - \theta x_1^3 = 0$. Dies ist die Gleichung der Kubik von Fig. 3, S. 36, mit Spitze und Wendetangente. Die Spitze erkennt man sofort als in der Ecke *III* liegend, da die niedrigsten Glieder in x_1, x_2 aus x_2^2 bestehen; $x_2 = 0$ ist also Tangente der Spitze. Die Kurve geht ferner durch $x_3 = 0$, $x_1^3 = 0$ (Ecke *II*), also mit $x_3 = 0$ als Wendetangente. Daß die Kurve 3. Klasse werden muß, wissen wir schon.

Setzen wir

$$\vartheta u_1 = -3\theta y_1^2; \quad \vartheta u_2 = 2 y_2 y_3; \quad \vartheta u_3 = y_2^2,$$

so erhält man hieraus ohne Schwierigkeit

$$y_1 : y_2 : y_3 = 2 u_3 \sqrt{u_1} : 2 u_3 \sqrt{-3\theta u_3} : u_2 \sqrt{-3\theta u_3};$$

diese Werte setzt man hier am besten in die Gleichung selbst ein, und es kommt nach Division mit $4 u_3^3$ und Quadrierung

$$\varphi \equiv u_2^2 u_3 + \tfrac{4}{27} \theta u_1^3 = 0$$

als Gleichung (3. Klasse!) in Linienkoordinaten. Wir sehen aus der Form von φ auch direkt, daß f zu sich selbst reziprok ist. Es ist aber ganz nützlich, die Gleichung φ etwas näher anzusehen. Wir haben dasselbe Koordinatendreieck, wie für f, doch sind jetzt die Ecken *I*, *II*, *III* durch Gleichungen, wie $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ gegeben. u_2^2 ist das niedrigste Glied in u_1, u_2; das

zeigt eine Doppeltangente mit zusammengefallenen Berührungspunkten, d. h. eine Wendetangente an, deren Koordinaten eben $u_2 = 0$, $u_1 = 0$ ($x_3 = 0$) sind. $u_3 = 0$ gibt $u_1^3 = 0$; dies sagt aus, daß von dem Punkte $u_3 = 0$ (Ecke *III*) drei zusammenfallende Tangenten mit den Koordinaten $u_3 = 0$, $u_1 = 0$ an die Kurve gehen. Und es ist so die Reziprozität von Wendetangente und Rückkehrpunkt auch analytisch ersichtlich.

Beisp. 3. Ein drittes Beispiel möge uns an einer bekannten Kurve zeigen, wie man ebenso von Linien- zu Punktkoordinaten übergeht. Zugleich wird uns dasselbe die Wichtigkeit der Formel (I) S. 29 illustrieren.

Man habe zwei senkrechte Achsen und lasse eine Gerade sich so bewegen, daß die zwei Achsen immer ein Stück $OA = a$ von ihr abschneiden; dann umhüllt die Gerade eine Kurve mit 4 sichtbaren Spitzen, die sogenannte reguläre Astroide (J. J. Littrow 1838, s. Fig. 6). Sind die Achsenabschnitte der erzeugenden Geraden in irgend einer Stellung λ und μ, so ist immer $\lambda^2 + \mu^2 = a^2$. Da nun, wenn u und v die Plückerschen Linienkoordinaten, $\lambda = -\frac{1}{u}$, $\mu = -\frac{1}{v}$ ist, so hat man sofort die Gleichung der Kurve in Linienkoordinaten (mit w als homogenisierender Variablen)

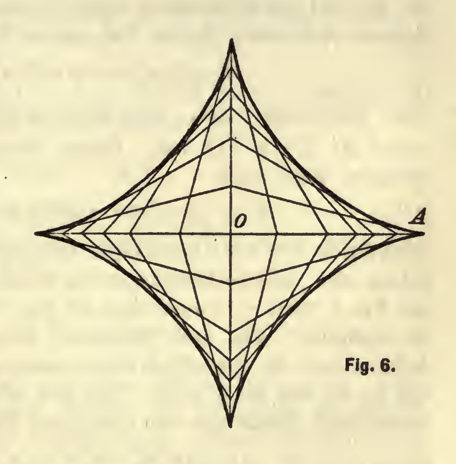


Fig. 6.

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} = \frac{a^2}{w^2} \text{ (4. Klasse)}.$$

Für den Übergang zu Punktkoordinaten hat man

$$\vartheta x = -2u^{-3}; \quad \vartheta y = -2v^{-3}; \quad \vartheta z = 2a^2 w^{-3};$$

hieraus

$$\sigma u^{-2} = x^{\frac{2}{3}}; \quad \sigma v^{-2} = y^{\frac{2}{3}}; \quad \sigma w^{-2} = a^{-\frac{4}{3}} z^{\frac{2}{3}} \quad \left[\sigma = \left(-\frac{2}{\vartheta}\right)^{\frac{2}{3}}\right];$$

substituiert man diese Werte in die Gleichung (α), so ergibt sich die Gleichung der Kurve in Punktkoordinaten

$$(\beta) \qquad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} z^{\frac{2}{3}},$$

oder in rationaler Form

(β*) $f \equiv (x^2 + y^2 - a^2 z^2)^3 + 27\, a^2 x^2 y^2 z^2 = 0$ (6. Ordnung).

Eine C_6 ist im allgemeinen von der 30. Klasse. Nun erkennt man auch aus der Gleichung (β*) sofort die vier reellen Spitzen, die in den Schnittpunkten von $x = 0$, $y = 0$ mit dem Kreis $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ liegen, aber auch zwei weitere auf $z = 0$ und demselben Kreis, also in den imaginären Kreispunkten. Die dadurch hervorgebrachte Verminderung der Klasse beträgt erst $6 \cdot 3 = 18$. Es sind demnach wohl noch (imaginär konjugierte) Doppelpunkte da, die wir der Symmetrie wegen in den Winkelhalbierenden der Achsen vermuten. In der Tat, setzen wir $x = \pm y$, so erhält man

(γ) $$F \equiv (2\,x^2 - a^2)^3 + 27\, a^2 x^4 = 0\,,$$

eine Gleichung, die, wie man leicht erkennt, die Wurzeln $x = \pm a\, i$ $(i = \sqrt{-1})$ hat. Diese Werte sind wirklich Doppelwurzeln, denn auch

(γ*) $$F' \equiv 12\, x\,(2\,x^2 - a^2)^2 + 4 \cdot 27\, a^2 x^3 = 0$$

wird durch $x = \pm a\, i$ befriedigt. Die so gefundenen 4 Doppelpunkte geben eine weitere Reduktion der Klasse um 8, so daß dieselbe in der Tat 4 wird. — Umgekehrt ist eine C^4 im allgemeinen von der 12. Ordnung, die drei (Spitzen-) Doppeltangenten (die beiden Achsen und die unendlich ferne Gerade) reduzieren dieselbe aber um 6, so daß sie 6 wird. Die drei erwähnten Doppeltangenten lassen sich direkt aus der Gleichung in Linienkoordinaten

(δ) $$\varphi \equiv v^2 w^2 + u^2 w^2 - a^2 u^2 v^2 = 0$$

herleiten. Denn die Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0\,, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0\,, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial w} = 0$$

werden sämtlich durch die Wertepaare $u = 0$, $w = 0$; $v = 0$, $w = 0$; $u = 0$, $v = 0$, das sind die Koordinaten der zwei Achsen und der unendlich fernen Geraden befriedigt (vgl. das Beisp. von Nr, 39).

Die so einfach aussehende und in einfacher Weise erzeugte Kurve ist demnach im Grunde ziemlich kompliziert und erst die Berücksichtigung aller imaginären Vorkommnisse bringt Klarheit[23]. Ein weiteres Beispiel (zugleich für eine andere, allgemeinere Methode) siehe in Nr. 123, Zusatz.

---

[23]) Näheres über die auch sonst sehr interessante Kurve bei Simon, S. S. VIII, S. 306 ff.

§ 10. Zusammenhang mit der Aufstellung der Reziproken einer Kurve.

26. Der Übergang von Punkt- zu Linienkoordinaten oder umgekehrt hängt aufs innigste zusammen mit der Aufstellung der Gleichung der Reziproken einer Kurve, die wir dem Leser auch noch schulden, (s. d. Fußnote 22 auf S. 36). Es sei die gegebene Kurve $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ und diese soll in bezug auf den Kegelschnitt $\mathsf{K} \equiv \overline{\underline{\sum^i \sum^k}}_1^3 a_{ik}\, x_i x_k = 0$ polarisiert werden.

Für die Koordinaten u_i der Polare eines Punktes (y) der Kurve hat man dann die Gleichungen

$$(5) \qquad \vartheta u_i = a_{i1}\, y_1 + a_{i2}\, y_2 + a_{i3}\, y_3 \qquad [i = 1, 2, 3]\,,$$

aus welchen in Verbindung mit $f(y_1, y_2, y_3) = 0$ die y_i zu eliminieren sind. Das System (5) läßt sich aber nach den y_i auflösen, und man erhält

$$(5^*) \qquad \frac{\Delta}{\vartheta}\, y_i = A_{1i}\, u_1 + A_{2i}\, u_2 + A_{3i}\, u_3 \qquad [i = 1, 2, 3]\,,$$

welche Werte man in $f = 0$ einzusetzen hat. Die Aufstellung der polarreziproken Kurve ist demnach analytisch durch eine lineare (also projektive) Transformation der Variablen gegeben, die man im allgemeinen Falle (wenn $a_{ik} \neq a_{ki}$) als »Korrelation« bezeichnet. Alle denkbaren zu einer gegebenen reziproken Kurven sind miteinander kollinear verwandt, da ja alle Kegelschnitte der Ebene projektiv sind. Man wird deshalb, solange nicht ein spezielles Problem vorliegt, für K einen möglichst einfachen Kegelschnitt wählen. Als solcher bietet sich diejenige Gleichung, in der alle $a_{ik} = 0$, wenn $i \lessgtr k$, und alle $a_{ii} = 1$ sind. Dann wird die Kurve polarisiert in bezug auf den allerdings imaginären (triangulär-symmetrischen) Kegelschnitt

$$(6) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

und man erhält die Gleichung der Reziproken $f(u_1, u_2, u_3) = 0$, indem man in der Kurvengleichung die x_i durch die u_i ersetzt. Der Kegelschnitt (6) geht dabei selbstverständlich in sich

selbst über (»Ordnungskegelschnitt«); seine Gleichung in Linienkoordinaten ist in der Tat

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0\,. \tag{6*}$$

Beisp. Der Leser versuche, sich von der zur Astroide reziproken (zirkularen) Kreuzkurve mit der kartesischen Gleichung $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = a^2$ eine Vorstellung zu machen.

27. Gehen wir nun von der Gleichung $f(u_1, u_2, u_3) = 0$ aus, um sie in bezug auf (6*) wieder zurückzupolarisieren, indem wir die Linienkoordinaten beizubehalten suchen, so müssen wir offenbar die Gleichung der ursprünglichen Kurve in Linienkoordinaten erhalten.

Für eine Gerade, die der Gleichung

$$f(v_1, v_2, v_3) = 0 \tag{7}$$

genügt, ist die Gleichung des Berührungspunktes

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v_1}\right) w_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial v_2}\right) w_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v_3}\right) w_3 = 0\,, \tag{8}$$

wo die w_i laufende Koordinaten sein mögen. Betrachten wir diesen Punkt als Pol einer Geraden in bezug auf (6*), so beschreibt (u) die reziproke Kurve. Dieser Pol hat aber die Gleichung

$$u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 = 0\,, \tag{9}$$

so daß wegen der Identität von (8) und (9)

$$\vartheta u_1 = f_1^v; \quad \vartheta u_2 = f_2^v; \quad \vartheta u_3 = f_3^v\,. \tag{10}$$

Eliminiert man aus diesem System in Verbindung mit (7), wofür nach dem EULERschen Theorem wiederum gesetzt werden kann

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0\,, \tag{7*}$$

die v_i, so ergibt sich offensichtlich dasselbe, wie aus den Gleichungen (1), (2), (3), (4) bez. (4*) in Nr. 25, nämlich die Gleichung der ursprünglichen Kurve in Linienkoordinaten. Das eine Problem ist somit auf das andere zurückgeführt.

III. THEORIE DER EINHÜLLENDEN.

§ 11. Beispiele zu dem gebräuchlichen Verfahren bei Aufstellung der Enveloppengleichung.

28. Die eben behandelte Aufgabe, nämlich die von den Polaren aller Punkte einer gegebenen Kurve in bezug auf einen Kegelschnitt umhüllte Kurve zu finden, ist nur ein sehr spezieller Fall des Problems der Einhüllenden überhaupt. Kommt in der Gleichung irgend einer Ordnungskurve eine variable Größe in den Koeffizienten (= Parameter) vor, und erteilen wir diesem Parameter nacheinander alle möglichen Werte, so werden wir eine ganze Reihe von Kurven bekommen und es gibt dann meist eine Kurve, die das ganze System, wie man sagt, einhüllt, d. h. jede einzelne Kurve der Reihe berührt.

Beisp. 1. Das Kreissystem $(x-\lambda)^2+y^2=r^2$, wo λ der Parameter ist, wird gebildet von allen Kreisen mit dem Radius r, deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen und hat die beiden Parallelen zur x-Achse: $y=\pm r$ als Enveloppe.

Beisp. 2. Die Gerade $x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$ hüllt bei variablem θ den Kreis $x^2+y^2=p^2$ ein.

Es liegt nicht in unserem Plane, die gebräuchlichen Methoden, die Gleichung dieser Eingehüllten (= Enveloppe) in verschiedenen Fällen aufzustellen und die mancherlei Anwendungen der Theorie auf Evoluten, Parallelkurven, Brennlinien usw. des näheren auseinanderzusetzen, da dieses Gebiet mehr der Differentialgeometrie angehört und auch meist metrische Probleme umfaßt, die für uns erst in zweiter Linie in Betracht kommen[24]. Doch mögen die Hauptgesichtspunkte wenigstens referierend hervorgehoben werden.

Enthält die Kurvengleichung $f(x_1, x_2, x_3, \lambda)=0$ *nur den einen Parameter* λ, *so differenziert man nach diesem, d. h. man bildet* $f'_\lambda(x_1, x_2, x_3, \lambda)$ *und eliminiert* λ *aus* f *und* f'. *Das Resultat ist die Gleichung der Enveloppe.*

---

[24]) Ausführliches siehe bei SALMON-FIEDLER (L. V.), III. Kapitel, die Grundlagen auch in W. FR. MEYERS *Integralrechnung*, S. S. XI, S. 207 ff.

Bem. Wir möchten doch nicht versäumen darauf hinzuweisen, daß eine Enveloppe nicht immer existieren muß, worauf zuerst DARBOUX im Bull. sc. math. 4 (1873) aufmerksam gemacht hat. Das Eliminationsresultat kann auch nur einen Ort von Spitzen (oder höheren Singularitäten) des Kurvensystems $f(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 0$ darstellen und enthält den Ort solcher Singularitäten zum mindesten als Bestandteil.

Es sei nur noch der Fall besonders erwähnt, daß f den Parameter λ rational, also wenn die ev. Nenner weggeschafft sind, rational ganz enthält. Dann ist es am besten, statt λ λ/μ in die Gleichung einzuführen, so daß dieselbe in λ und μ homogen wird. Man hat dann λ und μ aus $f'_\lambda = 0$ und $f'_\mu = 0$ zu eliminieren, was der Aufstellung der Diskriminante, wie wir schon wissen, gleich kommt.

Beisp. 3. Enthält eine Gerade den Parameter λ im n^{ten} Grad, so läßt sich ihre Gleichung in die Form bringen:

$$\lambda^n g_0 + \lambda^{n-1} \mu g_1 + \ldots + \lambda \mu^{n-1} g_{n-1} + \mu^n g_n = 0,$$

wo alle g_i lineare Ausdrücke in x_1, x_2, x_3 sind. Die Diskriminante ist in den g_i, also auch in den x_i, von der Ordnung $2(n-1)$. Das ist demnach die Ordnung der Enveloppe. Die Klasse der Enveloppe ist einfach n. Denn setzt man in die Gleichung der variablen Geraden die Koordinaten eines bestimmten Punktes (y) ein, so ergibt sich eine Gleichung n^{ten} Grades in λ: d. h. durch jeden Punkt (y) gehen n Gerade des Systems oder, was dasselbe ist, n Tangenten an die Enveloppe. Hat nun die Kurve etwa nur Doppeltangenten (keine Wendetangenten) und sei deren Zahl δ, so ist

$$2(n-1) = n(n-1) - 2\delta$$

und man findet $\delta = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, eine Zahl, deren große Bedeutung uns erst aufgehen wird. Es sei nur noch bemerkt, daß man die erzeugte Kurve eine rationale Kurve n^{ter} Klasse heißt, weil die Koordinaten u_i ihrer Erzeugenden aus obiger Parametergleichung als ganze rationale Funktionen n^{ten} Grades in λ sich ergeben.

Im einfachsten Falle $n = 1$ hat man das Geradenbüschel, das sein Zentrum einhüllt; für $n = 2$ die Gleichung $\lambda^2 g_0 + \lambda \mu g_1 + \mu^2 g_2$ und als Enveloppe den Kegelschnitt $g_1^2 - 4 g_0 g_2 = 0$.

Sind die g_i lineare Ausdrücke in Linienkoordinaten, so sprechen wir zwar nicht von einer Eingehüllten, die ganze Be-

trachtung bleibt aber dieselbe, d. h. der variable Punkt beschreibt eine rationale Kurve n^{ter} Ordnung mit $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkten (vgl. Abschn. V, 1).

29. Meist liegt aber der Fall gar nicht so einfach. Die Parametergleichung enthält oft 2 und mehr (eigentliche) Parameter, die dann noch durch eine entsprechende Zahl Verbindungsgleichungen verknüpft sind. So hat man zur Bestimmung der Evolute einer Kurve die Gleichung der Normalen eines Kurvenpunktes aufzustellen und deren Einhüllende zu bestimmen. Die Normalengleichung enthält aber die 2 (inhomogenen) Koordinaten des Kurvenpunktes, die durch die Gleichung der Kurve verknüpft sind. Wir wollen auch hier nur Beispiele für die allgemeine Theorie geben.

Beisp. 1. Sei die Gleichung einer Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, so ist die Gleichung der Tangente eines Punktes (ξ, η), für welchen

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=1, \tag{1}$$

$\frac{x\xi}{a^2}+\frac{y\eta}{b^2}=1$, die Gleichung der Normale desselben Punktes also

$$(x-\xi)\frac{\eta}{b^2}-(y-\eta)\frac{\xi}{a^2}=0,$$

oder

$$\frac{x\,a^2}{\xi}-\frac{y\,b^2}{\eta}=e^2\,[=a^2-b^2]\,. \tag{2}$$

Differenziert man nun (2) und (1) total, so erhält man

$$-\frac{x\,a^2}{\xi^2}\,d\xi+\frac{y\,b^2}{\eta^2}\,d\eta=0$$

$$\frac{\xi}{a^2}\,d\xi+\frac{\eta}{b^2}\,d\eta=0\,.$$

Durch Elimination von $d\xi$ und $d\eta$ aus diesen beiden Gleichungen entsteht eine neue Gleichung

$$\begin{vmatrix} -\frac{x\,a^2}{\xi^2} & \frac{y\,b^2}{\eta^2} \\ \frac{\xi}{a^2} & \frac{\eta}{b^2} \end{vmatrix} \equiv -\left(\frac{\eta}{\xi^2}\cdot\frac{x\,a^2}{b^2}+\frac{\xi}{\eta^2}\cdot\frac{y\,b^2}{a^2}\right)=0\,. \tag{3}$$

Aus (3) kommt aber $\eta^3 : \xi^3 = b^4 y : -a^4 x$, so daß es erlaubt ist zu setzen

$$\eta=\vartheta\, b\sqrt[3]{b\,y} \qquad \xi=-\vartheta\, a\sqrt[3]{a\,x}\,.$$

Substituiert man diese Werte in (1) und (2), so erhält man ohne Schwierigkeit:

$$(1^*) \qquad \vartheta^2\left(\sqrt[3]{a^2 x^2} + \sqrt[3]{b^2 y^2}\right) = 1 \quad \text{und}$$

$$(2^*) \qquad \sqrt[3]{a^2 x^2} + \sqrt[3]{b^2 y^2} = -e^2 \vartheta\,,$$

woraus $\vartheta = -e^{-\frac{2}{3}}$. Setzt man dies in (2*), so kommt als Gleichung der Ellipsenevolute

$$a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{4}{3}}\,.$$

Dies ist eine Kurve, die offenbar mit der Astroide (Nr. 25 Beisp. 3) sehr nahe verwandt ist und durch eine spezielle Kollineation (»affine« Transformation) in dieselbe übergeht.

Es ist hier noch eine Bemerkung zu machen, die für die Methode von Wichtigkeit ist. Die Determinante (3) enthält die partiellen Differentialquotienten von (1) und (2) resp. nach ξ und η. Hätte man die Gleichung $(1) + \lambda\,(2) = 0$ gebildet und diese partiell nach ξ bez. η differenziert, so wären 2 Gleichungen entstanden, aus denen man durch Elimination von λ auf dieselbe Determinante (3) gekommen wäre.

Beisp. 2. Soll man also z. B. die Einhüllende der Polaren $\mathsf{P} \equiv y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3 = 0$ des Punktes (y) der Kurve $f = 0$ in bezug auf den Kegelschnitt $\sum\limits_{1}^{3}{}_i\, x_i^2 = 0$ bestimmen, so bildet man die Form $f + \lambda\,\mathsf{P}$ und differenziert diese partiell nach y_1, y_2, y_3. Das führt zu dem Gleichungssystem

$$f_1^y + \lambda u_1 = 0\,; \quad f_2^y + \lambda u_2 = 0\,; \quad f_3^y + \lambda u_3 = 0\,,$$

was genau mit dem übereinstimmt, das schon in Nr. 25 zur Aufstellung der Linienkoordinatengleichung diente.

Beisp. 3. Ein drittes Problem diene gleichfalls noch zur Demonstration der eben erläuterten »Methode der unbestimmten Koeffizienten«. Wir wollen die Einhüllende der geraden Polaren in bezug auf eine Kurve der 3. Ordg. $f = 0$ bestimmen, wenn der Pol (y) selbst eine gegebene Gerade

$$\mathsf{G} \equiv a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 = 0$$

durchläuft. Die gerade Polare hat die Gleichung

$$\Gamma \equiv \sum_{i,k}^{1,2,3}\sum y_i y_k f_{ik}^x = 0\,.$$

Die sukzessiven Differentiationen von $\Gamma + \lambda G$ ergeben:

$$\begin{aligned} y_1 f_{11} + y_2 f_{12} + y_3 f_{13} + \lambda a_1 &= 0 \\ y_1 f_{12} + y_2 f_{22} + y_3 f_{23} + \lambda a_2 &= 0 \\ y_1 f_{13} + y_2 f_{23} + y_3 f_{33} + \lambda a_3 &= 0\,, \quad \text{dazu} \\ y_1 a_1 + y_2 a_2 + y_3 a_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Die Gleichung der Einhüllenden ist also:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & a_1 \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} & a_2 \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Dies ist offenbar ein Kegelschnitt, die sogenannte »Polokonik« der Geraden G in bezug auf die Kubik.

Die Polarkegelschnitte aller Punkte der Geraden G hüllen vier Punkte ein; denn sie bilden ein Büschel (Nr. 13, IV); dies kann hier direkt gezeigt werden.

§ 12. Die Czubersche Methode.

30. Die Differentialrechnung hat in all diesen Fällen zu beweisen, daß die resultierende Kurve die Kurven des gegebenen Systems auch wirklich berührt. Dies wird bei einem neuerdings von E. CZUBER[25]) angegebenen Verfahren vermieden, das wir deswegen ausführlicher wiedergeben.

Wir denken uns eine Kurve in parametrischer Darstellung gegeben, so daß etwa, kartesische Koordinaten vorausgesetzt,

$$x = \varphi(u) \qquad y = \psi(u) \tag{1}$$

gesetzt wird, woraus durch Elimination von u die implizite Kurvengleichung resultieren würde. Ist die Kurve variabel, so muß noch ein weiterer Parameter λ in den Funktionen φ und ψ enthalten sein, so daß die Gleichungen

$$x = \varphi(u, \lambda) \qquad y = \psi(u, \lambda) \tag{1*}$$

die Kurvenreihe, deren Enveloppe gesucht wird, definieren. Nehmen wir λ fest, so erhalten wir eine u-Kurve, wie in (1), halten wir aber u fest, so geben die Gleichungen (1*) eine λ-Kurve. Für ein bestimmtes Wertepaar u, λ erhalten wir

[25]) Archiv Math. Phys. (3) 2, 1902, S. 113—122.

demnach aus (1*) einen Punkt, durch den eine u-Kurve und eine λ-Kurve mit den bezüglichen Richtungen

$$\frac{d_u y}{d_u x} = \frac{\psi'_u}{\varphi'_u} \qquad \frac{d_\lambda y}{d_\lambda x} = \frac{\psi'_\lambda}{\varphi'_\lambda}$$

hindurchgehen. Die Punkte nun, in denen diese beiden Richtungen zusammenfallen, bilden in ihrer stetigen Aufeinanderfolge eine Kurve, die offensichtlich in jedem Punkte je eine u- und eine λ-Kurve berührt, d. h. beide Kurvenreihen (die im allgemeinen voneinander verschieden sind), einhüllt. Bedingung dafür ist das Verschwinden der »Funktionaldeterminante«

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \varphi'_u & \psi'_u \\ \varphi'_\lambda & \psi'_\lambda \end{vmatrix} \equiv \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, \lambda)}^{26)} = 0\,.$$

Eliminiert man mittels (2) aus (1*) den Parameter λ, so erhält man eine Parameterdarstellung der gesuchten Enveloppe in u, durch Elimination von u eine solche in λ. Die Elimination beider Parameter ergibt natürlich ein und dieselbe Schlußgleichung.

Beisp. Die Gleichung $\frac{x^2}{a^2-\lambda} + \frac{y^2}{b^2-\lambda} = 1$ stellt bekanntlich konfokale Kegelschnitte dar. Das System enthält den Parameter λ quadratisch und hat demnach eine eigentliche Enveloppe, die man nach der gebräuchlichen Methode in einer wenig durchsichtigen Form erhält. Zur Anwendung des Czuberschen Verfahrens führen wir die exzentrische Anomalie u ein und setzen

$$x = \sqrt{a^2-\lambda} \cdot \cos u \qquad y = \sqrt{b^2-\lambda} \cdot \sin u\,,$$

wobei bemerkt werde, daß die Elimination von λ das System der u-Kurven

$$\frac{x^2}{e^2 \cos^2 u} - \frac{y^2}{e^2 \sin^2 u} = 1 \qquad [e^2 = a^2 - b^2]$$

ergibt, was hier sogar mit dem der λ-Kurven, von dem wir ausgingen, identisch ist. Setzen wir nun

[26]) Dies ist eine sehr gebräuchliche Schreibart für Funktionaldeterminanten, die in der Form schon anzeigt, daß mit einer Funktionaldeterminante vielfach wie mit einem Differential-Quotienten gerechnet werden kann.

$$2\frac{\partial(x,y)}{\partial(\lambda,u)}=\begin{vmatrix} -\sqrt{a^2-\lambda}\sin u & \sqrt{b^2-\lambda}\cos u \\ -\frac{1}{\sqrt{a^2-\lambda}}\cos u & -\frac{1}{\sqrt{b^2-\lambda}}\sin u \end{vmatrix}=0,$$

so ergibt sich hieraus unschwer

$$\frac{\sin^2 u}{\cos^2 u}=-\frac{b^2-\lambda}{a^2-\lambda};$$

man kann also setzen

$$\left.\begin{aligned} \vartheta\sin^2 u &= -(b^2-\lambda) \\ \vartheta\cos^2 u &= \quad a^2-\lambda \end{aligned}\right\} \quad [\vartheta=a^2-b^2=e^2].$$

Die Elimination von λ ergibt sodann

$$x=\pm e\cos^2 u \qquad y=\pm e\,i\sin^2 u \qquad [i=\sqrt{-1}]$$

und schließlich:

$$\frac{x}{\pm e}+\frac{y}{\pm e\,i}=1.$$

Die Elimination von u ergäbe zunächst

$$x=\frac{a^2-\lambda}{e} \qquad \frac{y}{i}=\frac{b^2-\lambda}{e},$$

woraus

$$x-\frac{y}{i}=\frac{a^2-b^2}{e}=\pm e,$$

also schließlich wie vorhin

$$\frac{x}{\pm e}+\frac{y}{\pm e\,i}=1.$$

Dies ist ein System von vier Geraden durch die imaginären Kreispunkte im Unendlichen und die vier Brennpunkte im Endlichen, die ja auf den Achsen in den Abständen $\pm e$, resp. $\pm e\,i$ vom Mittelpunkt liegen. Man könnte auch sagen, die konfokalen Kegelschnitte sind alle einem (imaginären) Parallelogramm einbeschrieben. Sie bilden demnach eine Schar, und in der Tat ist ihre Linienkoordinatengleichung:

$$(a^2u^2+b^2v^2-1)-\lambda(u^2+v^2)=0.$$

Die vier gemeinsamen Tangenten ergeben sich hieraus als die gemeinschaftlichen Lösungen von

$$a^2u^2+b^2v^2-1=0 \quad \text{und} \quad u^2+v^2=0.$$

Das erstere ist aber eine Ellipse des Systems, während die zweite Gleichung die imaginären Kreispunkte selbst darstellt. Und die

Brennpunkte sind ja in der Tat nichts anderes (nach PLÜCKERS[27] Definition) als *die Schnittpunkte der aus den imaginären Kreispunkten an die Kurve gezogenen Tangenten*, die Ecken des umgeschriebenen »isotropen« Parallelogramms.

30a. Der Fall, daß das Kurvensystem durch die Gleichungen

$$x = \varphi(u, \lambda, \mu) \qquad y = \psi(u, \lambda, \mu) \tag{3}$$

mit der Bedingungsgleichung

$$\chi(\lambda, \mu) = 0 \tag{4}$$

gegeben ist, ist durch eine kleine Erweiterung des vorigen Verfahrens zu erledigen. Man hat hier die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \varphi'_u & \psi'_u \\ [\varphi'_\lambda] & [\psi'_\lambda] \end{vmatrix} = 0, \tag{5}$$

wo z. B.

$$[\varphi'_\lambda] = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \cdot \frac{d\mu}{d\lambda} = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} - \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \cdot \frac{\chi'_\lambda}{\chi'_\mu} = \frac{1}{\chi'_\mu}(\varphi'_\lambda \chi'_\mu - \varphi'_\mu \chi'_\lambda),$$

also statt (5)

$$\begin{vmatrix} \varphi'_u & \psi'_u \\ \dfrac{\partial(\varphi, \chi)}{\partial(\lambda, \mu)} & \dfrac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(\lambda, \mu)} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \varphi'_u & \psi'_u & 0 \\ \varphi'_\lambda & \psi'_\lambda & \chi'_\lambda \\ \varphi'_\mu & \psi'_\mu & \chi'_\mu \end{vmatrix} \equiv \frac{\partial(\varphi, \psi, \chi)}{\partial(u, \lambda, \mu)} = 0. \tag{5*}$$

Aus (3), (4) und (5*) sind die 3 Parameter zu eliminieren. Die neue Gleichung ist also, wie man sieht, immer die Funktionaldeterminante der gegebenen Gleichungen.

---

[27]) *„Über solche Punkte, die bei Kurven einer höheren Ordnung als der zweiten den Brennpunkten der Kegelschnitte entsprechen"*. Journ. f. Math. **10**, 1832, S. 84—91 (= *Gesammelte Abhandlungen* S. 290/97).

ABSCHNITT III.

DIE HESSESCHE UND VERWANDTE KURVEN.

§ 13. **Die Hessesche und Steinersche Kurve.**

31. Wir wollen endlich darangehen und, wie in Nr. 24a angekündigt, die Wendepunkte einer Ordnungskurve $f = 0$ direkt zu bestimmen suchen. Wir erinnern, daß für die Schnittpunkte der Verbindungslinie zweier Punkte (x) und (y) mit der Kurve sich die Gleichung ergab:

$$(1^*)\quad \begin{cases} \mu^n f^y + \mu^{n-1}\lambda\, \Delta_x(f^y) + \dfrac{1}{1\cdot 2}\mu^{n-2}\lambda^2 \Delta_x^2(f^y) + \dots \\ \qquad\qquad + \dfrac{\lambda^n}{n!}\Delta_x^n(f^y) = 0\,. \end{cases}$$

Ist (y) ein Kurvenpunkt und liegt (x) auf der Tangente von (y), so ist für gewöhnlich

$$f^y = 0 \quad \text{und} \quad \Delta_x(f^y) = 0\,.$$

Ist aber auch $\Delta_x^2(f^y) = 0$, so hat die Tangente drei in (y) koinzidierende Schnittpunkte mit der Kurve und (y) ist ein Wendepunkt. Da jedoch der Polarkegelschnitt $\Delta_x^2(f^y) = 0$ die Tangente in (y), wie bekannt, berührt, so kann er mit derselben weitere Punkte (x) nur in dem Falle gemein haben, daß er zerfällt und die Tangente selbst als Teil enthält.

Der Polarkegelschnitt zerfällt nun ganz allgemein dann, wenn die Determinante seiner Koeffizienten verschwindet. Die Pole (y), für welche dies der Fall ist, erfüllen demnach einen Ort, die Kurve

$$\mathsf{H} \equiv \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix} = 0\,,$$

die als HESSEsche Kurve[28]) (oder Form) eine große Rolle spielt.

*Die **Wendepunkte** nun sind nichts anderes als die Schnittpunkte von* H *und* f, *sind also jeder Kurve eigentümlich und ihre Zahl ist, da* H *von der Ordnung* $3(n-2)$,

$$\varrho = 3n(n-2),$$

vorausgesetzt, daß f *ohne Singularitäten ist.*

Für den Doppelpunkt (z) des Linienpaares, das den Polarkegelschnitt des Punktes (y) bildet, gelten die Gleichungen:

$$\text{(2)} \qquad \left\{ \begin{array}{l|l} z_1 f_{11}^y + z_2 f_{12}^y + z_3 f_{13}^y = 0 & y_1 \\ z_1 f_{12}^y + z_2 f_{22}^y + z_3 f_{23}^y = 0 & y_2 \\ z_1 f_{13}^y + z_2 f_{23}^y + z_3 f_{33}^y = 0. & y_3 \end{array} \right.$$

Multipliziert man diese, wie angedeutet, mit y_1, y_2, y_3 und addiert, so erhält man, da nach dem EULERschen Theorem

$$\sum_1^3 y_i f_{ik} = (n-1) f_k$$

$$\text{(3)} \qquad z_1 f_1^y + z_2 f_2^y + z_3 f_3^y = 0.$$

Diese Gleichung sagt im allgemeinen, daß die Polargerade von $(y): \Delta_x(f^y) = 0$ durch den Punkt (z) geht, was wegen Nr. 13, II selbstverständlich ist; im besonderen, wenn (y) auf der Kurve liegt, gibt sie einen noch deutlicheren Beweis, daß die eine Gerade des Linienpaares die Tangente selbst ist.

Beisp. 1. Wir wollen H für die explizite Gleichungsform $F(x) \equiv y - f(x) = 0$ bilden! Zuerst entferne man aus H, das man in x geschrieben denke, die dritte Variable x_3, indem man die letzte Reihe (und Zeile) mit x_3 multipliziert und die mit x_1 resp. x_2 multiplizierten übrigen Reihen (Zeilen) dazu addiert. So erhält man, unter beständiger Anwendung des EULERschen Theorems

$$\mathsf{H} = \frac{1}{x_3(n-1)} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_1 \\ f_{12} & f_{22} & f_2 \\ f_{13} & f_{23} & f_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{x_3^2(n-1)} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_2 \\ (n-1)f_1 & (n-1)f_2 & nf \end{vmatrix}.$$

[28]) HESSE: „*Über die Wendepunkte der Kurven 3. Ordnung*". Journ. f. Math. **28**, 1844, S. 97—107 (= *Gesammelte Werke* S. 123—135). Benennung nach SYLVESTER.

Als Bedingung für die Wendepunkte bekommen wir also hier $f = 0$,

und $$\begin{vmatrix} -f'' & 0 & -f' \\ 0 & 0 & 1 \\ -f' & 1 & 0 \end{vmatrix} \equiv f'' = 0,$$

die für alle Kurven geltende aus der Differentialrechnung bekannte Bedingungsgleichung.

Beisp. 2. Vermittels des Beisp. 2 von Nr. 18 wird sich nach dem hier Dargelegten leicht der Satz ergeben:

Ist Q ein Wendepunkt einer Kubik, so ist der geometrische Ort aller Punkte P, die in bezug auf die Punkte S_1 und S_2, in denen eine durch Q gehende Gerade die Kurve schneidet, zu Q harmonisch liegen, eine Gerade.

Diese Gerade heißt die »harmonische Polare« des Wendepunktes. — Der Satz läßt sich umkehren, da die konische Polare eines Kurvenpunktes außer für einen Wendepunkt nur noch für jeden Doppelpunkt zerfällt (Nr. 19). In diesem Falle existieren aber keine zwei Schnittpunkte S_1, S_2 mehr.

32. Betrachten wir die Gleichungen (2) und (3) unter dem Gesichtspunkt, daß (z) der Pol und (y) variabel sei, so ist (3) die Gleichung der ersten Polare und (2) das System der Bedingungen, daß diese einen Doppelpunkt (y) habe. Die Elimination der z_i aus (2) ergibt aber wieder die HESSEsche Form $\mathsf{H} = 0$. Wir können demnach sagen:

Hat die konische Polare eines Punktes (y) einen Doppelpunkt in (z), so hat die erste Polare des Punktes (z) einen Doppelpunkt in (y). Der Ort des Punktes (y) ist die Hessesche Kurve $\mathsf{H} = 0$.

Bem. In der Theorie der Formen wird gezeigt, und es ist dies aus der geometrischen Fragestellung ohne weiteres deutlich, daß H (sowie die in der Folge zu besprechenden Kurven) zur gegebenen in einer durch Projektion unzerstörbaren Beziehung stehen, d. h. in der Sprache der Formentheorie: *Die Hessesche Form ist zur gegebenen eine »Kovariante«.*

Es liegt nun nichts näher, als nach dem Orte des Punktes (z) zu fragen. Wir brauchen, um die bezügliche Gleichung aufzustellen, aus dem System (2) nur die y_i zu eliminieren, was im allgemeinen freilich wesentlich schwieriger ist, als die Elimination der z_i. Nach einem Satze der Algebra

ist die Ordnung der entstehenden Gleichung $S = 0$ zusammengesetzt aus den Produkten der Ordnungen je zweier Gleichungen, also $3(n-2)^2$. Die Kurve wird nach STEINER benannt, der sie zuerst studierte[29]). Wir können demnach sagen:

Die Steinersche Kurve $S = 0$ *ist der Ort der Doppelpunkte der konischen Polaren, oder der Ort der Punkte, deren erste Polaren Doppelpunkte besitzen.*

Beisp. Aus diesem Satze geht von selbst hervor, *daß* H *und* S *für eine Kubik durch dieselbe Kurve dritter Ordnung dargestellt werden.* Wir können dies aber auch leicht direkt zeigen. Den Polarkegelschnitt (= erste Polare) können wir in folgenden beiden Formen schreiben

$$K \equiv \tfrac{1}{2}(f_{11}^y x_1^2 + 2 f_{12}^y x_1 x_2 + \ldots + f_{33}^y x_3^2) \equiv y_1 f_1^x + y_2 f_2^x + y_3 f_3^x = 0\,.$$

Die Bedingung eines Doppelpunktes führt zu den beiden identischen Systemen von je drei Gleichungen ($i = 1, 2, 3$):

$$f_{i1}^y x_1 + f_{i2}^y x_2 + f_{i3}^y x_3 = 0 \quad \text{und} \quad y_1 f_{1i}^x + y_2 f_{2i}^x + y_3 f_{3i}^x = 0\,.$$

Hieraus ersieht man in der Tat, daß die Elimination der x_1, x_2, x_3 oder der y_1, y_2, y_3 dasselbe Resultat $H = 0$ (resp. $S = 0$) ergibt, nur entweder in y oder in x geschrieben. D. h. der Pol (y) erfüllt denselben Ort wie der Doppelpunkt (x) seines Polarkegelschnitts.

§ 14. Gegenseitige Beziehung der beiden Kurven H und S.

33. Über H und S gibt es eine Reihe von Sätzen. Wir wollen die beiden Kurven hier nur noch unter einem neuen Gesichtspunkt betrachten, der uns allerdings dem Wesen ihrer gegenseitigen Beziehung bedeutend näher bringen wird.

Wir denken uns zwei zunächst ganz beliebige Punkte (z) und (x), deren erste Polaren (y als Variable gedacht) die Gleichungen haben

$$(4) \quad \begin{cases} \text{a)} \quad P_z \equiv f_1^y z_1 + f_2^y z_2 + f_3^y z_3 = 0 \\ \text{b)} \quad P_x \equiv f_1^y x_1 + f_2^y x_2 + f_3^y x_3 = 0\,, \end{cases}$$

wobei gleich bemerkt sei, daß jede dieser Gleichungen, wenn

[29]) *„Allgemeine Eigenschaften algebraischer Kurven."* Journ. f. Math. **47**, 1854, S. 1—6. Benennung nach CREMONA. STEINER gebrauchte den Namen »Kernkurve«.

wir für (y) einen der $(n-1)^2$ Schnittpunkte von P_z und P_x einsetzen und die z_i resp. x_i als laufende Koordinaten nehmen, die Gerade $\overline{zx}$ darstellt, als gerade Polare des Punktes (y). Den ∞^2 Polarenbüscheln $\mathsf{P}_z + \mu\,\mathsf{P}_x = 0$, die den ∞^2 Geraden der Ebene entsprechen, können wir nun eine Bedingung auferlegen, dann werden wir eine ∞^1-Reihe erhalten. Wir setzen etwa die Bedingung, daß zwei der $(n-1)^2$ Grundpunkte unendlich nahe rücken; dann berühren sich dort alle Polaren des Büschels. Die Tangente dieses Punktes (y) muß dann für beide obigen Polaren (und infolgedessen für alle Kurven des Büschels) dieselbe sein. Wir müssen demnach ihre Koordinaten proportional setzen, d. h.

$$\frac{\partial \mathsf{P}_z}{\partial y_i} = \lambda \frac{\partial \mathsf{P}_x}{\partial y_i}.$$

Dies führt zu dem Gleichungssystem:

$$(5)\quad \begin{cases} (z_1-\lambda x_1)f_{11}^y + (z_2-\lambda x_2)f_{12}^y + (z_3-\lambda x_3)f_{13}^y = 0 \\ (z_1-\lambda x_1)f_{12}^y + (z_2-\lambda x_2)f_{22}^y + (z_3-\lambda x_3)f_{23}^y = 0 \\ (z_1-\lambda x_1)f_{13}^y + (z_2-\lambda x_2)f_{23}^y + (z_3-\lambda x_3)f_{33}^y = 0\,. \end{cases}$$

Eliminieren wir hieraus, um den Ort für die Punkte (y) zu erhalten, die Größen $z_i - \lambda x_i$, so resultiert wiederum $\mathsf{H} = 0$:

Die Hessesche Kurve ist der Ort der Pole, die mit einem ihrer verbundenen Pole zusammenfallen.

Die Koordinaten der allen Polaren in diesem Punkte gemeinsamen Tangente sind:

$$(6)\quad \begin{cases} \vartheta u_1 = f_{11}^y z_1 + f_{12}^y z_2 + f_{13}^y z_3 \\ \vartheta u_2 = f_{12}^y z_1 + f_{22}^y z_2 + f_{23}^y z_3 \\ \vartheta u_3 = f_{13}^y z_1 + f_{23}^y z_2 + f_{33}^y z_3\,, \end{cases}$$

wo statt (z) jeder Punkt der Geraden $\overline{zx}$ mit den Koordinaten $z_i - \lambda x_i$ eingesetzt werden kann mit Ausnahme des einzigen Punktes, in dem die Tangente die Gerade $\overline{zx}$ schneidet. Hat dieser Punkt die Koordinaten $z_i - \lambda' x_i$, so bestimmt sich λ' aus der Gleichung

$$u_1(z_1-\lambda' x_1) + u_2(z_2-\lambda' x_2) + u_3(z_3-\lambda' x_3) = 0\,.$$

Dies ergibt

$$\{f_{11}^y z_1^2 + 2f_{12}^y z_1 z_2 + \dots\} - \lambda'\{f_{11}^y z_1 x_1 + f_{12}^y(z_1 x_2 + z_2 x_1) + \dots\} = 0.$$

Hier ist, wenn wir (y) fest denken, die erste Klammer die konische Polare von (y), die wegen $\mathsf{H} = 0$ notwendig ein Linienpaar ist. Um die Untersuchung zu vereinfachen, legen wir nun gleich (z) selbst in diesen Schnittpunkt, dann wird $\lambda' = 0$, was nur eintritt, wenn (z) der konischen Polare genügt. (z) ist infolgedessen, da es ja von Anfang an auch der linearen Polare angehörte, der Doppelpunkt des zu (y) als Pol gehörigen Linienpaares (was sich auch direkt zeigen läßt) und somit der (y) entsprechende Punkt von S, d. h. (y) erfüllt das Gleichungssystem (2) und macht somit die drei Koordinaten u_i der Tangente (6) zu Null. Dies bedeutet wiederum nichts anderes, als daß die diesem Punkt (z) entsprechende Polare in (y) einen Doppelpunkt hat. Und wir erhalten so H schließlich wieder als Ort der Doppelpunkte der ersten Polaren.

34. Man kommt nun nicht schwer zu der Vermutung, da H von den koinzidierenden Polen von $\overline{zx}$ beschrieben wird, so müsse S von den Geraden $\overline{zx}$ selbst umhüllt werden. Um dies nachzuweisen, müßten wir nur zeigen, daß im Punkte (z), der ja der STEINERschen Kurve angehört, gerade $\overline{zx}$ die Tangente ist. Das hat aber einige Schwierigkeit, da wir die entwickelte Gleichung für S nicht besitzen. Um so interessanter ist es, daß es trotzdem gelingt, diesen Nachweis zu führen. Wir gehen aus von der Gleichung

$$z_1 f_1^y + z_2 f_2^y + z_3 f_3^y = 0\,, \tag{3}$$

die wir schon in Nr. 32 gewannen. Differenzieren wir diese partiell nach z, d. h. gehen wir auf S von (z) zum benachbarten Punkt $(z + dz)$, der noch auf der Tangente liegt, so kommt

$$dz_1 f_1^y + dz_1 f_2^y + dz_3 f_3^y = 0\,. \tag{7}$$

Aus (3) und (7) erhält man aber ohne weiteres

$$f_1^y : f_2^y : f_3^y = \begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ dz_2 & dz_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z_3 & z_1 \\ dz_3 & dz_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ dz_1 & dz_2 \end{vmatrix}.$$

Die hier auftretenden Determinanten sind jedoch nichts anderes als die Koordinaten der Verbindungslinie von (z) mit $(z + dz)$, d. h. der Tangente, und (3) ist also deren Gleichung, wenn die z_i nun als Variable betrachtet werden.

Das ist aber gerade die Gleichung von $\overline{zx}$ [siehe (4)]. Wir können demnach sagen:

Die Steinersche Kurve S *ist die Enveloppe der Geraden, die ein Paar zusammenfallender Pole haben, oder die Enveloppe der geraden Polaren aller Punkte der Hesseschen Kurve in bezug auf die Fundamentalkurve. Sie berührt infolgedessen alle Wendetangenten der Fundamentalkurve.*

Halten wir einen Punkt (x) fest und suchen die Zahl der durch ihn gehenden Tangenten $\overline{xz}$ an S, so ist nur zu beachten, daß die entsprechenden Pole (y) sowohl (4b) wie H befriedigen müssen, ihre Zahl also $3(n-1)(n-2)$ ist. Ebenso groß ist natürlich die Anzahl der Berührungspunkte (z) der Tangenten durch (x), d. h. die Klasse von S.

Die Klasse von H erhält man sehr einfach, wenn man annimmt, daß H im allgemeinen keine Punktsingularitäten besitzt[30]), nach der Formel $\nu = n(n-1)$ zu $3(n-2)(3n-7)$.

Beisp. Für Kubiken ergibt sich hieraus der Satz:

Die Polargerade eines Punktes (y) *von* H *in bezug auf die Kubik berührt* H *im Doppelpunkte* (z) *der konischen Polare von* (y).

§ 15.

Die Cayleysche Kurve. Das Chaslessche Korrespondenzprinzip.

35. Wir haben so deutlich gesehen, wie jedem Punkte (y) von H ein Punkt (z) auf S entspricht und umgekehrt. Es erübrigt noch, um der Untersuchung einen gewissen Abschluß zu geben, auf die Einhüllende der Linie $\overline{yz}$ hinzuweisen, die man die Cayleysche[31]) Kurve nennt. Ihre Gleichung $C = 0$ in Linienkoordinaten würde man aus dem System (6) erhalten, das in Verbindung mit $H^y = 0$ gewissermaßen eine

[30]) Einen direkten Beweis hierfür hat P. del Pezzo geliefert: *„Sulla Curva Hessiana"*. Rend. Acc. sc. fis. mat. Napoli, fasc. 6°. Giugno 1883.

[31]) Siehe die Abhdlg.: *„A memoir on curves of the third order"*. Phil. Trans. **147**, 1857, S. 415—446. Benennung nach Cremona. Cayley gebrauchte den Namen »Pippian« weil er sie mit *„P"* bezeichnete.

Parameterdarstellung der Kurve gibt. Wir können demnach sagen:

Die Cayleysche Kurve C *ist die Enveloppe entsprechender Punkte auf* H *und* S, *oder die Enveloppe der gemeinsamen Tangenten der sich berührenden ersten Polaren. Sie wird ebenfalls von allen Wendetangenten der Grundkurve berührt.*

Die Bestimmung der Klasse von C bietet uns eine willkommene Gelegenheit, gleich ein sehr wichtiges, in ähnlichen Fragen viel angewandtes Prinzip abzuleiten: das sogenannte »CHASLESsche Korrespondenzprinzip«, das jedoch DE JONQUIÈRES schon[32]) vorher gebrauchte (1860; CHASLES 1864).

Es seien C_N und C_n zwei Kurven N^{ter} resp. n^{ter} Ordnung, zwischen denen, wie zwischen H und S, eine »(1,1)-Korrespondenz« besteht, so daß jedem Punkte (y) von C_N ein bestimmter Punkt (z) von C_n entspricht und umgekehrt[33]). *Wir fragen nach der Klasse der Enveloppe von* $\overline{yz}$. Diese Frage ist beantwortet, wenn wir wissen, wieviel Linien $\overline{yz}$ durch einen beliebigen Punkt, etwa die Ecke *III* des Koordinatensystems gehen. Ziehen wir irgend eine Gerade G durch *III*, so schneidet diese die C_N in N Punkten (y), denen ebensoviele Punkte (z) auf C_n entsprechen. Die N Strahlen von *III* nach diesen N Punkten (z) werden durch eine Gleichung

$$\Phi_N \equiv a_0 x_1^N + a_1 x_1^{N-1} x_2 + \dots + a_N x_2^N = 0$$

gegeben sein. Einer andern Geraden L durch *III* werden ebenso N Strahlen mit der Gleichung

$$\Phi'_N \equiv a'_0 x_1^N + a'_1 x_1^{N-1} x_2 + \dots + a'_N x_2^N = 0$$

entsprechen. Dem ganzen Büschel $x_1 + \lambda x_2 = 0$ (das mit $\mathsf{G} + \theta \mathsf{L} = 0$ identisch ist) wird so in bekannter Art die »Strahleninvolution N^{ten} Grades«

$$\Phi_N + \lambda \Phi'_N = 0 \tag{8}$$

[32]) Siehe „*L'œuvre mathématique d'Ernest de Jonquières*". Par G. LORIA, Bibl. Math. (3) **3**, 1902, S. 285 ff.

[33]) Die Bedingung für die Möglichkeit solcher ein-eindeutiger Beziehungen zwischen zwei Kurven wird uns später beschäftigen (s. Abschn. VIII).

zugeordnet sein. Ganz in derselben Weise erhalten wir aber, wenn wir die Gerade G zuerst mit C_n zum Schnitt bringen, für die Punkte (y) die Strahleninvolution

$$\Psi_n + \lambda \Psi'_n = 0 , \tag{9}$$

wo die Ψ den Φ entsprechende homogene Ausdrücke in x_1, x_2 sind. Durch das λ sind die beiden Involutionen projektiv aufeinander bezogen. Da sie zudem »konlokal« sind, d. h. beide demselben Träger (III) angehören, muß es eine Anzahl Strahlen durch III geben, die sich selbst zugeordnet sind (Doppelstrahlen), deren Gleichung man erhält, wenn man aus (8) und (9) λ eliminiert. Dies ergibt

$$\Phi_N \Psi'_n - \Phi'_N \Psi_n = 0 , \tag{10}$$

eine Gleichung vom $(N+n)^{\text{ten}}$ Grad in x_1, x_2. Für unser Problem bedeutet dies, daß es $N+n$ Strahlen $\overline{IIIz}$ gibt, die zugleich entsprechende Strahlen $\overline{IIIy}$ sind, das sind eben Verbindungslinien $\overline{yz}$, die durch III gehen.

Die Klasse der Enveloppe aller $\overline{yz}$ ist also $N+n$. Die Klasse der CAYLEYschen Kurve demnach

$$3(n-2) + 3(n-2)^2 = 3(n-1)(n-2) .$$

Von dem speziellen Problem losgelöst, für Punktreihe und Strahlbüschel gleichmäßig gültig, lautet das CHASLESsche Korrespondenzprinzip:

Besteht zwischen den Elementen zweier konlokalen Elementargebilde eine Beziehung der Art, daß jedem Element des ersten Gebildes N Elemente des zweiten, jedem Element des zweiten n des ersten entsprechen, so gibt es $N+n$ Elemente, die sich selbst entsprechen,

oder ganz kurz:

In einer (N, n)-Korrespondenz auf demselben Träger gibt es $N+n$ Doppelelemente.

Bem. Die einfachste ein-eindeutige Beziehung der erörterten Art ist die projektive Zuordnung zweier (geraden) Punktreihen resp. zweier Strahlenbüschel (1. Ordg.). Diese bildet bekanntlich die Grundlage der projektiven Theorie der Kegelschnitte.

ABSCHNITT IV.

DIE PLÜCKERSCHEN FORMELN.

§ 16. Das Verhalten der Hesseschen Kurve in vielfachen Punkten.

36. Nachdem wir so die allgemeinen Eigenschaften von H, S und C kennen gelernt, erübrigt noch, speziell H etwas näher zu untersuchen, besonders mit Rücksicht auf das Verhalten der Kurve in den singulären Punkten, um endlich bezüglich der Zahl der Wendepunkte einer Punktkurve, auch beim Vorhandensein von Singularitäten, Bestimmtes aussagen zu können.

Daß die HESSEsche Kurve H durch die Doppelpunkte der Fundamentalkurve geht, wissen wir bereits. Zum Zwecke einer genaueren Untersuchung legen wir die Ecke *III* des Koordinatensystems in den Doppelpunkt und nehmen die Tangenten der Doppelpunkte als Koordinatenseiten. So wird

$$f \equiv x_3^{n-2} x_1 x_2 + x_3^{n-3} u^{(3)} + \ldots + u^{(n)} = 0 .$$

Nach Nr. 19, VII wird es für H genügen, wenn wir in ihrer Gleichung den Faktor der höchstvorkommenden Potenz von x_3 kennen. Wir benutzen deshalb zweckmäßig den Ausdruck aus Nr. 31, Beisp. 1, in dem die Differentiation nach der dritten Variablen eliminiert ist; dieser lautet entwickelt:

$$\begin{aligned} \mathsf{H} \cdot x_3^2 \equiv n(n-1) f (f_{11} f_{22} - f_{12}^2) \\ - (n-1)^2 \{f_1^2 f_{22} - 2 f_1 f_2 f_{12} + f_2^2 f_{11}\} . \end{aligned}$$

Man erhält nun der Reihe nach, wenn wir $u^{(3)}$ kurz mit u bezeichnen und die Differentiationen durch Indizes andeuten:

$$
\begin{aligned}
f_1 &= x_3^{n-2} x_2 + x_3^{n-3} u_1 + \dots \\
f_2 &= x_3^{n-2} x_1 + x_3^{n-3} u_2 + \dots \\
f_{11} &= x_3^{n-3} u_{11} + \dots \\
f_{12} &= x_3^{n-2} + x_3^{n-3} u_{12} + \dots \\
f_{22} &= x_3^{n-3} u_{22} + \dots
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
& f_{11} f_{22} - f_{12}^2 \\
&= x_3^{2n-6} u_{11} u_{22} + \dots \\
&\quad - x_3^{2n-4} - \dots
\end{aligned}
$$

$$
f_1^2 f_{22} - 2 f_1 f_2 f_{12} + f_2^2 f_{11} = x_3^{2n-4} x_2^2 x_3^{n-3} u_{22} - 2 x_3^{3n-6} x_1 x_2 + 2 x_3^{2n-4} x_1^2 x_3^{n-3} u_{11} + \dots
$$

Berücksichtigt man überall nur die höchsten Potenzen von x_3, so ergibt sich

$$
\mathsf{H} \cdot x_3^2 = -n(n-1)(x_3^{n-2} x_1 x_2 + \dots)(x_3^{2n-4} + \dots) - (n-1)^2 \{2 x_3^{3n-6} x_1 x_2 - x_3^{3n-7} (x_1^2 u_{11} + x_2^2 u_{22}) + \dots\},
$$

also

$$
\mathsf{H} = x_3^{3n-8} x_1 x_2 (n-1)(n-2) + x_3^{3n-9} \{\dots\} + \dots
$$

In einem Doppelpunkt der Fundamentalkurve hat demnach die Hessesche Kurve ebenfalls einen Doppelpunkt mit denselben Tangenten.

In diesen Punkt fallen also 6 Schnittpunkte von H mit f zusammen, d. h. *der Doppelpunkt reduziert die Zahl der Wendepunkte um 6.*

Beisp. Das Descartessche Blatt (Fig. 7) hat die Gleichung

$$x^3 + y^3 - 3axyz = 0\,.$$ [34]

Man findet leicht

$$\mathsf{H} \equiv x^3 + y^3 + axyz = 0\,.$$

Das ist also wieder ein Descartessches Blatt, dessen Schleife aber entgegengesetzt liegt.

Fig. 7.

Eine genauere Untersuchung ergäbe in der Tat für H, daß die Zweige der beiden Doppelpunkte sich im allgemeinen von

[34]) Bezüglich dieser und andrer spezieller Kurven sei ein für allemal auf das fundamentale Werk von G. Loria verwiesen (L.V.), in welchem mit staunenswerter Vollständigkeit alles in dieses Gebiet, das wie nur streifen können, Fallende zusammengetragen ist.

außen berühren. Als Schnittpunkte der beiden Kurven, d. h. als Wendepunkte des DESCARTESschen Blattes erhalten wir nur noch die 3 Punkte im Unendlichen: $z=0$, $x^3+y^3=0$, von denen nur einer reell ist, mit der reellen Tangente (Wendeasymptote) $x+y-a=0$. Wir werden bald sehen (Nr. 47), daß allgemein jede C_3^4 3 in einer Geraden liegende Wendepunkte hat, von denen im Falle des Knotens nur einer reell ist.

37. Der Fall der Spitze bedarf einer eigenen Untersuchung. Nehmen wir hier

$$f \equiv x_3^{n-2} x_1^2 + x_3^{n-3} u + \ldots = 0\,,$$

wo

$$u \equiv a_0 x_1^3 + 3\,a_1 x_1^2 x_2 + 3\,a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3\,,$$

so erhalten wir

$$f_1 = 2\,x_3^{n-2} x_1 + x_3^{n-3} u_1 + \ldots \qquad f_2 = x_3^{n-3} u_2 + \ldots$$

$$f_{11} = 2\,x_3^{n-2} + x_3^{n-3} u_{11} + \ldots \qquad f_{12} = x_3^{n-3} u_{12} + \ldots$$

$$f_{22} = x_3^{n-3} u_{22} + \ldots,$$

und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathsf{H} \cdot x_3^2 &= n(n-1)\, x_3^{n-2} x_1^2 \{2\, x_3^{2n-5} u_{22} + \ldots\} \\ &\quad - (n-1)^2 \{x_3^{2n-6} u_2^2 \cdot 2\, x_3^{n-2} + \ldots + 4\, x_3^{2n-4} x_1^2 x_3^{n-3} u_{22}\} \\ &= x_3^{3n-7} x_1^2 u_{22} \{2\,n(n-1) - 4\,(n-1)^2\} + \ldots, \end{aligned}$$

also

$$\mathsf{H} = -12\, x_3^{3n-9} \cdot \underbrace{x_1^2 (a_2 x_1 + a_3 x_2)}\, (n-1)(n-2) + \ldots$$

H *hat also in einer Spitze der Fundamentalkurve einen dreifachen Punkt, von dessen drei Tangenten* (die durch die geschweifte Klammer markiert sind) *zwei in die Tangente der Spitze zusammenfallen.*

Dieser Punkt nimmt 8 Schnittpunkte der beiden Kurven auf, d. h. *eine Spitze reduziert die Anzahl der Wendepunkte um 8.* (Die genauere Ableitung der Reduktionszahlen 6 bez. 8 findet der Leser in Beisp. 1 von Nr. 68).

Beisp. Die Kissoide des DIOKLES (Fig. 8) hat die Gleichung

$$x(x^2+y^2) = 2\,r\,y^2 z\,.^{35)}$$

---

[35]) Die Kissoide (von ἡ κισσός = der Efeu, wegen der Gestalt des im Kreis liegenden Teiles, da man bis ins 17. Jahrhundert die unendlichen Zweige nicht betrachtete; auch für das DESCARTESsche

Man findet für H sofort $xy^2 = 0$, also eine zerfallene Kubik (eine eigentliche könnte ja keinen dreifachen Punkt haben), die aus der doppeltzählenden Rückkehrtangente und der y-Achse zusammengesetzt ist. Die letztere schneidet die Kissoide nur noch in einem (hier unendlich fernen) Wendepunkte ($x = 0$, $z = 0$), dessen Tangente (Wendeasymptote) $x - 2r = 0$ ist.

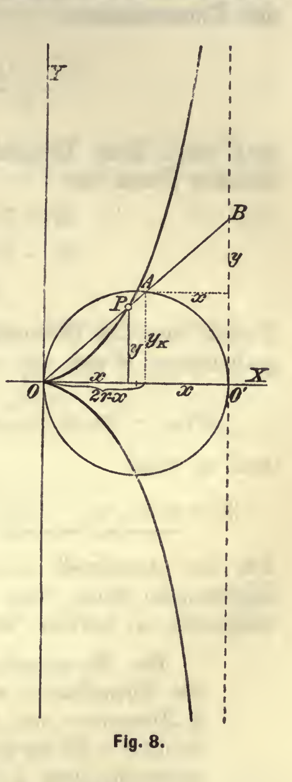


Fig. 8.

38. Es ist von Interesse, das Verhalten von H auch in einem k-fachen Punkt direkt zu untersuchen. Habe f die Gleichung

$$f \equiv x_3^{n-k} u^{(k)} + \ldots + u^{(n)} = 0,$$

wo

$$u^{(k)} \equiv u \equiv a_0 x_1^k + k a_1 x_1^{k-1} x_2 + \ldots + a_k x_2^k,$$

so erhält man

$$\begin{aligned}
f_1 &= x_3^{n-k} u_1 + \ldots \\
f_2 &= x_3^{n-k} u_2 + \ldots \\
f_{11} &= x_3^{n-k} u_{11} + \ldots \\
f_{12} &= x_3^{n-k} u_{12} + \ldots \\
f_{22} &= x_3^{n-k} u_{22} + \ldots
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\mathsf{H} \cdot x_3^2 &= n(n-1) x_3^{n-k} u \cdot x_3^{2(n-k)} (u_{11} u_{22} - u_{12}^2) \\
&\quad - (n-1)^2 x_3^{3(n-k)} \{u_1^2 u_{22} - 2 u_1 u_2 u_{12} + u_2^2 u_{11}\} + \ldots
\end{aligned}$$

Blatt anzumerken!) konstruiert man am einfachsten, indem man in einem Kreis mit dem Radius r einen Durchmesser OO' zieht, in O' die Tangente, und nun auf jedem Strahl durch O $OP = AB$ macht. — Zur Aufstellung der Gleichung entnimmt man der Figur die Proportion:

$$y : x = y_K : (2r - x)$$

und, da $y_K = \sqrt{x(2r - x)}$, nach Quadrieren und Kürzen:

$$y^2 : x^2 = x : (2r - x),$$

woraus ohne weiteres $y^2(2r - x) = x^3$ und die obige Gleichung hervorgeht. — Auch Polarkoordinaten sind mit Vorteil zu verwenden.

Nun ist aber der Ausdruck der geschweiften Klammer gleich der Determinante

$$-\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_1 \\ u_{12} & u_{22} & u_2 \\ u_1 & u_2 & 0 \end{vmatrix}$$

und nach dem EULERschen Theorem hat man, da u eine binäre Form ist:

$$\begin{aligned} (k-1)\, u_1 &= x_1 u_{11} + x_2 u_{12} \\ (k-1)\, u_2 &= x_1 u_{12} + x_2 u_{22} \\ k\, u &= x_1 u_1 \;+ x_2 u_2 \,. \end{aligned}$$

Formt man die Determinante demnach in der hierdurch angedeuteten Weise um, so resultiert schließlich

$$u_1^2 u_{22} - 2\, u_1 u_2 u_{12} + u_2^2 u_{11} = \frac{k}{k-1}\, u\,(u_{11} u_{22} - u_{12}^2)$$

und es wird

$$\mathsf{H} = \underbrace{u\,(u_{11} u_{22} - u_{12}^2)} \cdot x_3^{3(n-k)-2} \cdot \frac{(n-1)(k-n)}{k-1} + \ldots$$

Da der Ausdruck in der runden Klammer offenbar die HESSEsche Form von u ist (siehe auch die obige Determinante), so können wir sagen:

> *Die Hessesche Kurve hat in einem k-fachen Punkt der Grundkurve einen $(3\,k-4)$-fachen Punkt, von dem k Tangenten mit denen von f zusammenfallen, während die $(2\,k-4)$ übrigen sich durch die Hessesche Determinante der jene k Tangenten bestimmenden binären Form darstellen lassen*[36]*.*

Dabei haben wir die k Tangenten des k-fachen Punktes als getrennt vorausgesetzt. Es ist leicht, den Satz auf k-fache Punkte mit zusammenfallenden Tangenten auszudehnen, worauf wir nicht eingehen. Wir wollen für den von uns betrachteten Fall nur noch die Schnittpunkte der beiden Kurven abzählen, die im k-fachen Punkt vereinigt sind. Dies sind offenbar

$$k\,(3\,k-4) + k = 3\,k\,(k-1)\,.$$

---

[36]) Siehe A. BRILL „*Über die Hessesche Kurve*". Math. Ann. **13**, 1878, S. 175—182.

Um die letztere Zahl wird also die Anzahl der Wendepunkte der Grundkurve verringert beim Vorhandensein eines k-fachen Punktes. Da aber

$$3k(k-1) = 6 \cdot \frac{k(k-1)}{2},$$

so haben wir damit einen direkten Beweis erbracht, daß ein k-facher Punkt (wenigstens in bezug auf Polareneigenschaften) gleich $\frac{k(k-1)}{2}$ Doppelpunkten zu rechnen ist (s. Nr. 20c).

§ 17. Die Plückerschen und daraus abgeleitete Formeln.

39. Die Resultate der Nrn. 37 und 38 können wir in eine Formel zusammenfassen. Wir erhalten für die *Anzahl ϱ der Wendepunkte einer Ordnungskurve mit d Doppelpunkten und r Spitzen:*

$$(1) \qquad \varrho = 3n(n-2) - 6d - 8r,$$

und die dualistische Formel für Klassenkurven

$$(2) \qquad r = 3\nu(\nu-2) - 6\delta - 8\varrho.$$

Nehmen wir dazu noch aus Nr. 21 und 24 die beiden Gleichungen

$$(3) \qquad \nu = n(n-1) - 2d - 3r$$

und

$$(4) \qquad n = \nu(\nu-1) - 2\delta - 3\varrho,$$

so läßt sich nun auch die *Zahl δ der Doppeltangenten* einer Ordnungskurve durch n, d, r ausdrücken. Indem man in (4) für ν und ϱ die Werte aus (3) und (1) einsetzt, erhält man nach einiger Rechnung:

$$(5) \quad \begin{cases} 2\delta = n(n-2)(n^2-9) - 2(n^2-n-6)(2d+3r) \\ \qquad + 4d(d-1) + 12dr + 9r(r-1) \end{cases}$$

und ähnlich die reziproke Formel:

$$(6) \quad \begin{cases} 2d = \nu(\nu-2)(\nu^2-9) - 2(\nu^2-\nu-6)(2\delta+3\varrho) \\ \qquad + 4\delta(\delta-1) + 12\delta\varrho + 9\varrho(\varrho-1). \end{cases}$$

Diese 6 Gleichungen, die die Beziehung zwischen der Ordnungs- und Klassenzahl einer Kurve beim Vorhanden-

sein von nur einfachen Singularitäten erschöpfend darstellen, sind die berühmten **Plückerschen Formeln.**[37])

Bem. Die PLÜCKERsche Gleichung (5) ist schwer zu behalten und geometrisch nicht direkt verständlich. Die Figuren 9 und 9* zeigen nun, daß in jede von einem Doppelpunkt ausgehende Tangente 2 Doppeltangenten zusammengefallen sind, in jede von einer Spitze ausgehende 3, in eine Verbindungslinie zweier Doppelpunkte 4, in eine Verbindungslinie eines Doppelpunktes und einer

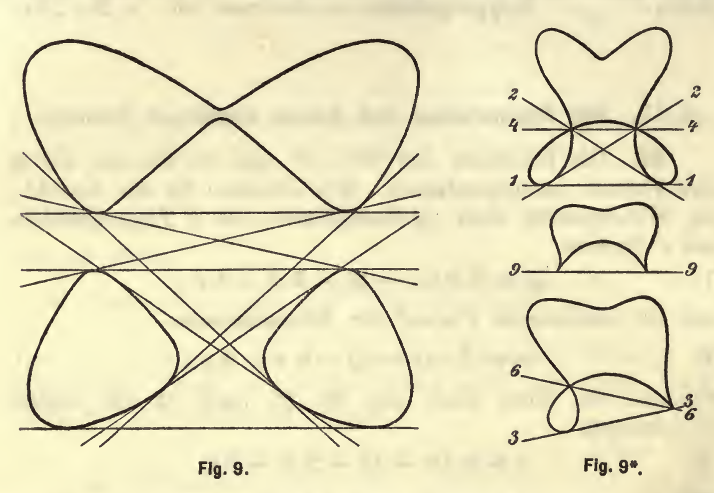


Fig. 9. Fig. 9*.

Spitze 6 und in jede Verbindungslinie zweier Spitzen 9. Da nun offenbar für eine Kurve ohne Singularitäten $\delta = \frac{1}{2} n (n-2)(n^2-9)$ ist, ergibt sich mit Benützung der Bem. in Nr. 21

$$(5^*) \quad \begin{cases} \delta = \frac{1}{2} n (n-2)(n^2-9) - 2\, d\, (\nu - 4) - 3\, r\, (\nu - 3) \\ \qquad - 2\, d\, (d-1) - 6\, d\, r - \frac{9}{2} r\, (r-1)\,. \end{cases}$$

Diese Gleichung ist in der Tat mit (5) identisch. Eine entsprechende Gleichung läßt sich natürlich an die Stelle von (6) setzen.

Beisp. Wir erinnern an die Astroide (Nr. 25, Beisp. 3), für welche $n = 6$, $d = 4$, $r = 6$ war, und die wir demnach von der vierten Klasse fanden. Die Zahl der Doppeltangenten entnahmen

[37]) Von PLÜCKER zuerst gegeben in dem Aufsatze „*Solution d'une question fondamentale concernant la théorie générale des courbes*". Journ. f. Math. **12**, 1834, S. 105—108.

wir der Anschauung; wir finden nun aus (5)

$$2\,\delta = 6 \cdot 4 \cdot 27 - 2 \cdot 24 \cdot 26 + 16 \cdot 3 + 12 \cdot 4 \cdot 6 + 9 \cdot 6 \cdot 5 = 6$$

also $\delta = 3$; und ferner

$$\varrho = 18 \cdot 4 - (24 + 48) = 0\,.$$

40. Aus den PLÜCKERschen Formeln lassen sich noch einige andere ableiten. Besonders sind solche beachtenswert, die von der Form

$$\varphi(n, d, r) = \varphi(\nu, \delta, \varrho)$$

sind, und demgemäß Eigenschaften entsprechen, die einer Kurve und ihrer Reziproken gleichmäßig zukommen.

So findet man aus (2) und (4) durch Elimination von ν die Gleichung

$$(7) \qquad \boldsymbol{r - 3\,n = \varrho - 3\,\nu\,, \quad \text{oder} \quad r - \varrho = 3\,(n - \nu)\,.}$$

Dieselbe Gleichung ergibt sich aber auch aus (1) und (3) durch Elimination von δ. Wir sehen hieraus, *daß auch die ersten 4 Gleichungen nicht voneinander unabhängig und nur 3 unabhängigen äquivalent sind.*

Durch Subtraktion von (3) und (4) ergibt sich weiter

$$n^2 - \nu^2 = 2\,(d - \delta) + 3\,(r - \varrho)\,,$$

und es läßt sich daher mit Benützung von (7) jede Funktion von $(n + \nu)$ und $(n - \nu)$ durch die Singularitätenzahlen d, r, δ, ϱ ausdrücken. Von solchen Funktionen sind vorzugsweise zwei zu betrachten, die wichtige Formeln geben.

Man findet

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\,[n^2 - \nu^2 + 3\,(n - \nu)] &= \tfrac{1}{2}\,[2\,(d - \delta) + 4\,(r - \varrho)] \\ &= d - \delta + 2\,(r - \varrho)\,, \end{aligned}$$

oder, wenn man die linke Seite etwas anders schreibt und umstellt, die Formel:

$$(8) \qquad \boldsymbol{\tfrac{1}{2}\,n\,(n + 3) - d - 2\,r = \tfrac{1}{2}\,\nu\,(\nu + 3) - \delta - 2\,\varrho\,.}$$

Diese Formel hat eine sehr einfache geometrische Bedeutung. Denken wir uns nämlich die Kurve in der Form

$$f \equiv u^{(0)}\,x_3^n + u^{(1)}\,x_3^{n-1} + \ldots + u^{(n)} = 0$$

gegeben, so sehen wir sofort, daß dieselbe

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n + 1) = \tfrac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$$

Glieder hat, oder

$$\tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)-1=\frac{n^2+3n}{2}=\tfrac{1}{2}n(n+3)$$

unabhängige Koeffizienten. Die allgemeine n-ik ist also durch ebensoviele Punkte bestimmt, da die Bedingung, daß ein Punkt (x_1, x_2, x_3) auf der Kurve liege, immer eine lineare Gleichung für die Koeffizienten ergibt. Ein Doppelpunkt zählt aber, wie wir früher (Nr. 22) gesehen, für eine Bedingung, eine Spitze für zwei und so gibt die linke Seite von (8) die Anzahl der Elemente (Punkte), durch die eine mit d Doppelpunkten und r Spitzen begabte n-ik bestimmt wird, welche Anzahl natürlich mit der entsprechenden für die reziproke Kurve übereinstimmen muß.

Wir erhalten eine ähnliche Formel wie (8), wenn wir von der Funktion

$$\tfrac{1}{2}[n^2-\nu^2-3(n-\nu)]=\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)-\tfrac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2)$$

ausgehen. Man findet diesen Ausdruck

$$=\tfrac{1}{2}[2(d-\delta)+2(r-\varrho)]=d-\delta+r-\varrho$$

und so die Formel

$$(9)\qquad \begin{cases} \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)-d-r \\ =\tfrac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2)-\delta-\varrho\,[=p]\,. \end{cases}$$

Die Zahl p heißt das »Geschlecht« der Kurve und Formel (9) sagt demnach aus, daß eine Kurve mit ihrer Reziproken von gleichem Geschlecht ist. Indem wir uns die nähere Erläuterung dieses wichtigen neuen Begriffs für den nächsten Abschnitt vorbehalten, wollen wir hier nur noch die Zahl p in die PLÜCKERschen Formeln einführen. Man kann dieselben dann in die folgende einfache Form bringen:

$$(10)\qquad 2(p-1)=\begin{cases} \nu+r-2n \\ n+\varrho-2\nu \\ n(n-3)-2(d+r) \\ \nu(\nu-3)-2(\delta+\varrho)\,. \end{cases}$$

Die leichte Umformung wollen wir dem Leser überlassen.

Bem. Hätte man etwa die Gleichungen (8) und (9) auf andere Weise direkt erwiesen, so würde eine der übrigen 7 Gleichungen genügen, um alle andern herzuleiten.

ABSCHNITT V.

GESCHLECHT. RATIONALE KURVEN.

1. Allgemeines.

§ 18. Maximalzahl der Doppelpunkte.

41. Die Zahl p, die wir als Geschlecht definierten, stellt sich als drittes Klassifikationselement neben die Ordnung n und die Klasse ν [38]). Sie erreicht bei einer Kurve von gegebener Ordnungszahl den höchsten Wert, wenn diese aller Singularitäten bar ist; dann ist $p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. Andererseits läßt sich beweisen, daß bei einer eigentlichen n-ik p niemals negativ werden kann, d. h. daß eine nicht zerfallende Kurve n^{ter} Ordnung nicht mehr als $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkte und Spitzen zusammengenommen haben kann. So kann ein Kegelschnitt keine, eine Kubik eine, eine Quartik höchstens 3 einfache Singularitäten haben. Zerfällt aber der Kegelschnitt in zwei Gerade, so erhält er einen Doppelpunkt, während die Kubik, falls sie sich aus einem Kegelschnitt und einer Geraden, oder aus drei Geraden zusammensetzt, 2 resp. 3 Doppelpunkte erhält, und die zerfallene Quartik bis zu 6 Doppelpunkten haben kann.

Hätte nämlich eine C_3 2 Doppelpunkte, so würde die gerade Verbindungslinie derselben die Kurve in 4 Punkten schneiden, und durch 4 Doppelpunkte einer C_4 könnte man

---

[38]) Die Größe p wurde von Riemann in die Theorie der algebraischen Funktionen eingeführt in der berühmten Abhdlg.: *„Theorie der Abelschen Funktionen"*. Journ. f. Math. **54**, 1857, [= Ges. Werke VI, S. 81—135]. Clebsch bezeichnete sie als Geschlechtszahl und wandte die Riemannschen Ideen auf die Kurventheorie an. S. Journ. f. Math. **63**, 1863, S. 189—243: *„Über die Anwendung der Abelschen Funktionen in der Geometrie"* und ebd. **64**, 1864, S. 98—100: *„Über die Singularitäten algebraischer Kurven"*. — Die Engländer sagen mit Cayley noch heute allgemein »deficiency« statt »Geschlecht«.

eine C_2 legen, die noch durch irgend einen Punkt der C_4 ginge, also mit der Quartik mindestens 9 Schnittpunkte gemein hätte. Nach Nr. 12 muß also die Quartik zerfallen.

Wir denken uns nun, um allgemein auf die Maximalzahl $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ zu kommen, eine C_n mit N Doppelpunkten und legen durch diese und noch andere $\frac{1}{2}h(h+3)-N$ Punkte der C_n eine h-ik C_h, zählen sodann die Schnittpunkte der C_n und der C_h ab und stellen die Bedingung, daß diese Zahl wenigstens um 1 größer sei als nh. Dann war auch N wenigstens um 1 zu groß. Die gesuchte Bedingung ergibt sich leicht, indem man bedenkt, daß jeder Doppelpunkt der C_n zu 2 Schnittpunkten Anlaß gibt, als

$$2N + \{\tfrac{1}{2}h(h+3) - N\} = nh + 1\,, \tag{1}$$

woraus

$$N = \tfrac{1}{2}h\{2n - (h+3)\} + 1\,. \tag{2}$$

Nehmen wir nun h, um (1) zu genügen, versuchsweise gleich $(n-1$ — wir wollen jedenfalls h möglichst niedrig wählen, schließen also Werte $\gtreqless n$ von vornherein aus — so ergibt sich

$$N = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) + 1\,.$$

Ein Versuch mit $h = n-2$ gibt genau dasselbe Resultat. Wir kommen so schon mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit auf den gesuchten Maximalwert. Versuchen wir noch $h = n-3$ zu nehmen, so ergäbe sich $N = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. Es ist aber leicht ersichtlich, daß die Zahl $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ von Doppelpunkten, falls sie existierte, auf einer $(n-3)$-ik im allgemeinen gar nicht liegen kann, denn es ist

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) = \tfrac{1}{2}(n-3)\cdot n + 1\,,$$

also um 1 größer als die zur Bestimmung einer $(n-3)$-ik nötige Zahl von Punkten.

Die Möglichkeit, daß wirklich $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkte existieren, erkennen wir nun daran, daß für $N = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ die linke Seite von (1) um $2-1=1$ abnimmt und die Zahl der Schnittpunkte dann wirklich nh ist.

Bem. Am raschesten gelangt man zu der Zahl $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, wenn man bedenkt, daß die höchste Singularität einer eigentlichen n-ik ein $(n-1)$-facher Punkt ist (vgl. die Bem. in Nr. 19), der aber nach Nr. 20 c) $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkten äquivalent ist.

§ 19.

Begriff und Darstellung der rationalen Kurven.

42. Geben wir aber für die C_h einen Punkt weniger, so erhalten wir eine Reihe von h-iken mit einem Freiheitsgrad, d. h. ein Büschel $C_h + \lambda \Gamma_h = 0$ (wo $h = n - 1$, oder $= n - 2$), das mit der C_n $nh - 1$ feste und 1 variablen Punkt gemein hat. Diesem variablen Punkt der C_n sind nacheinander die Werte des Parameters λ von $-\infty$ bis $+\infty$ zugeordnet. Infolgedessen ist es einerseits möglich, alle Kurven mit der Maximalzahl von Doppelpunkten eindeutig aufeinander, z. B. punktweise eindeutig auf einen Kegelschnitt oder eine Gerade zu beziehen, andererseits gibt diese Darstellung das Mittel an die Hand, die Koordinaten des variablen Kurvenpunktes rational durch den Parameter λ auszudrücken, was für die in Rede stehenden Kurven typisch ist.

Eliminieren wir nämlich aus der Gleichung der gegebenen Kurve und der erwähnten Büschelgleichung eine Variable, etwa x_2, so entsteht eine Gleichung $\Phi = 0$ für das Verhältnis x_1/x_3, das den nh Schnittpunkten beider Kurven entspricht. In das Eliminationsresultat geht λ natürlich im n^{ten} Grade ein. Der Quotient des ersten und letzten Koeffizienten in Φ gibt aber das Produkt aller Wurzeln, aus dem man leicht die bekannten $nh - 1$ abscheidet. Was noch übrig bleibt, ist der Wert $x_1/x_3 = f_1/f_3$, der dem variablen Schnittpunkt entspricht, offenbar ein Quotient zweier ganzen rationalen Funktionen n^{ten} Grades in λ. In ganz derselben Weise erhält man auch das Verhältnis x_2/x_3 als einen ebensolchen Bruch. Doch ist nicht ohne weiteres ersichtlich, daß dieser Bruch denselben Nenner f_3 haben wird. Setzen wir aber den Wert f_1/f_3 statt x_1/x_3 in die Gleichung $f = 0$, so resultiert für x_2 eine Gleichung n^{ten} Grades, deren Wurzeln den n Schnittpunkten der Geraden $x_1/x_3 = f_1/f_3$ mit $f = 0$ entsprechen. Der Koeffizient von x_2^n ist dabei eine reine Konstante, während das letzte Glied eine Funktion $(n \cdot n)^{\text{ter}}$ Ordnung in λ ist, die man sich in n Faktoren n^{ten} Grades in λ zerlegt denken muß. Von diesen Faktoren entspricht e i n e r unserm variablen Punkt, und das x_2 desselben ergibt sich demnach als g a n z e rationale Funktion n^{ten} Grades in λ.

43. Wir bekommen also eine Darstellung folgender Art:

$$(3)\qquad \begin{cases} \vartheta x_1 = f_1(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n \\ \vartheta x_2 = f_2(\lambda) = a'_0\lambda^n + a'_1\lambda^{n-1} + \ldots + a'_n \\ \vartheta x_3 = f_3(\lambda) = a''_0\lambda^n + a''_1\lambda^{n-1} + \ldots + a''_n, \end{cases}$$

wegen deren man die in Rede stehenden Kurven »rationale Kurven« nennt. Wir erkennen dieselben als identisch mit den von uns in Nr. 28 Beisp. 3 betrachteten. Wie dort zeigt man nun umgekehrt, daß eine Gerade $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ mit der vorliegenden Kurve n Schnittpunkte hat, die durch die Gleichung

$$(4)\qquad u_1 f_1 + u_2 f_2 + u_3 f_3 = 0$$

bestimmt werden. Betrachten wir in (4) die u_i als variabel, so können wir sie als Gleichung des die Kurve definierenden Punktes oder in gewissem Sinne als Gleichung der Kurve selbst betrachten[39]. Die von λ befreite implizite Kurvengleichung erhält man durch das SYLVESTERsche Eliminationsverfahren [s. das Beisp. 3 von Nr. 44] aus (3) in Punktkoordinaten, aus (4), wie in Nr. 28 angegeben, in Linienkoordinaten. Zu diesem Zwecke ist es besser, statt λ λ/μ in die f_i einzuführen. Dann hat man aus den beiden Gleichungen

$$(5)\qquad \begin{cases} u_1\dfrac{\partial f_1}{\partial\lambda} + u_2\dfrac{\partial f_2}{\partial\lambda} + u_3\dfrac{\partial f_3}{\partial\lambda} = 0, \quad \text{und} \\ u_1\dfrac{\partial f_1}{\partial\mu} + u_2\dfrac{\partial f_2}{\partial\mu} + u_3\dfrac{\partial f_3}{\partial\mu} = 0 \end{cases}$$

λ und μ zu eliminieren. Man erhält aber aus (5) auch die entsprechende Parameterdarstellung in Linienkoordinaten:

$$(6)\qquad \begin{cases} \sigma u_1 = \dfrac{\partial f_2}{\partial\lambda}\dfrac{\partial f_3}{\partial\mu} - \dfrac{\partial f_3}{\partial\lambda}\dfrac{\partial f_2}{\partial\mu} \\ \sigma u_2 = \dfrac{\partial f_3}{\partial\lambda}\dfrac{\partial f_1}{\partial\mu} - \dfrac{\partial f_1}{\partial\lambda}\dfrac{\partial f_3}{\partial\mu} \\ \sigma u_3 = \dfrac{\partial f_1}{\partial\lambda}\dfrac{\partial f_2}{\partial\mu} - \dfrac{\partial f_2}{\partial\lambda}\dfrac{\partial f_1}{\partial\mu}. \end{cases}$$

---

[39]) Siehe J. C. F. HAASE *„Zur Theorie der ebenen Kurven n^{ter} Ordg. mit $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppel- und Rückkehrpunkten"*. Math. Ann. **2**, 1870, S. 515—548.

Diese Darstellung macht für rationale Kurven die Formel (9) von Nr. 40 direkt evident und gibt andererseits auch sofort die Klassenzahl $\nu = 2(n-1)$. Daraus leiteten wir schon in Nr. 28 die Anzahl $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ der vorhandenen Doppelpunkte ab, unter der Voraussetzung, daß Spitzen im allgemeinen nicht auftreten. In der Tat entsteht ja ein Doppelpunkt der rationalen Kurve dadurch, daß zwei verschiedenen Werten λ_0 und λ_0' von λ dasselbe Wertesystem x_1, x_2, x_3 entspricht. Sollte eine Spitze entstehen, so müßte $\lambda_0' = \lambda_0 + d\lambda_0$ sein; denn in der Spitze koinzidieren zwei konsekutive Punkte. Dazu ist aber eine Diskriminantenbedingung nötig!

So haben wir nicht nur bewiesen, daß jede Kurve, die etwa tatsächlich $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ einfache Singularitäten hätte, der angegebenen rationalen Parameterdarstellung fähig ist, sondern daß jede beliebig vorgegebene solche Parameterdarstellung wirklich einer Kurve n^{ter} Ordnung mit $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ einfachen Singularitäten entspricht[40]), daß also p die untere Grenze 0 auch wirklich erreichen kann.

44. Befinden sich nun unter den $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkten etwa tatsächlich r Spitzen, so erhält man

$$\nu = 2(n-1) - r,$$

und

$$\begin{aligned}\varrho &= 3n(n-2) - 3(n-1)(n-2) - 2r \\ &= 3(n-2) - 2r.\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich eine obere Grenze für die Anzahl der möglichen Spitzen:

$$r \leqq \tfrac{3}{2}(n-2),$$

eine Zahl, die — bez. die nächstkleinere ganze Zahl — wirklich scheint erreicht werden zu können.

---

[40]) Der Leser, dem unser Gedankengang nicht genügt, sei aufmerksam gemacht, daß die Gleichung $[(n-1)(n-2)]^{\text{ten}}$ Grades für die Parameter der Doppelpunkte tatsächlich aufgestellt werden kann. Für eine Spitze hat diese Gleichung zwei gleiche Wurzeln, was die im Text erwähnte Diskriminantenbedingung ergibt. Man vergleiche außer der schon zitierten Arbeit von Haase besonders die fundamentale Abhandlung von Clebsch *„Über diejenigen ebenen Kurven, deren Koordinaten rationale Funktionen eines Parameters sind“*. Journ. f. Math. **64**, 1864, S. 43—65. Auch bei Hermite *„Cours d'analyse usw.“*. (Paris 1873), S. 250 und bei A. Schmitz *„Die rationalen ebenen Kurven“*, Progr. Gymn. Münnerstadt 1898 finden sich direkte Beweise, daß die Darstellung (3) zu $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ einfachen Singularitäten Anlaß gibt.

Bem. Im allgemeinen muß für jede Kurve $6d + 8r \leqq 3n(n-2)$ sein. Man erhält demnach überhaupt als oberste Grenze für die Zahl der Spitzen, wenn $d = 0$ ist, $r \leqq \frac{3}{8}n(n-2)$. Da aber $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \frac{3}{8}n(n-2) = \frac{1}{8}(n-2)(n-4)$, so sieht man auch hieraus, daß für $n > 4$ niemals alle Singularitäten der rationalen n-ik Spitzen sein können.

Beisp. 1. Die bekannte Darstellung der Geraden durch zwei Punkte x_0, y_0; x_0', y_0'

$$x = \frac{x_0 - \lambda x_0'}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y_0 - \lambda y_0'}{1 - \lambda}$$

erscheint jetzt als ein sehr spezieller Fall von (3). Gleichung der Geraden!

Beisp. 2. Die Parameterdarstellung der Ellipse gibt man gewöhnlich in der Form: $x = a \cos u$; $y = b \sin u$. Führt man $\lambda = \operatorname{tg} \frac{1}{2} u$ ein, so gelangt man zu der rationalen Darstellung

$$x : y : z = a(1 - \lambda^2) : 2b\lambda : (1 + \lambda^2).$$

Für die Hyperbel erhält man aus: $x = a \sec u$; $y = b \operatorname{tg} u$ ebenso

$$x : y : z = a(1 + \lambda^2) : 2b\lambda : (1 - \lambda^2).$$

Die Darstellung: $x = k\lambda$; $y = k/\lambda$ oder

$$x : y : z = k\lambda^2 : k : \lambda$$

gibt die auf die Asymptoten bezogene Gleichung $xy = k^2$.

Die Gleichungen $x = \lambda^2$; $y = \sqrt{2p} \cdot \lambda$ stellen die Parabel $y^2 = 2px$ dar.

Beisp. 3. Durch die 3 Gleichungen

$$\begin{aligned} \vartheta x_1 &= a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 \\ \vartheta x_2 &= a_0' \lambda^2 + a_1' \lambda + a_2' \\ \vartheta x_3 &= a_0'' \lambda^2 + a_1'' \lambda + a_2'' \end{aligned}$$

ist ein allgemeiner Kegelschnitt definiert.

Das Sylvestersche Eliminationsverfahren besteht nun darin, daß man jede Gleichung mit λ multipliziert, wodurch man 6 Gleichungen erhält, die in den 6 Größen $\vartheta\lambda$, ϑ, λ^3, λ^2, λ, 1 homogen sind. Die Elimination ergibt als Gleichung des Kegelschnitts

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ x_2 & 0 & a_0' & a_1' & a_2' & 0 \\ x_3 & 0 & a_0'' & a_1'' & a_2'' & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & x_2 & 0 & a_0' & a_1' & a_2' \\ 0 & x_3 & 0 & a_0'' & a_1'' & a_2'' \end{vmatrix} = 0.$$

Beisp. 4. Will man für eine Kubik mit Doppelpunkt eine Parameterdarstellung geben[41]), etwa für das DESCARTESsche Blatt (Nr. 36 Beisp.): $x^3 + y^3 - 3\,a\,x\,y\,z = 0$, so schneidet man am besten die Kurve mit einem Geradenbüschel durch den Doppelpunkt $x - \lambda\,y = 0$. Setzt man $x = \lambda\,y$ in die Gleichung ein, so ergibt sich

$$y\,(1 + \lambda^3) - 3\,a\,\lambda\,z = 0$$

und schließlich

$$x : y : z = 3\,a\,\lambda^2 : 3\,a\,\lambda : (1 + \lambda^3)\,.$$

Behandle entsprechend die Kissoide (Nr. 37 Beisp.)!

§ 20. Eindeutige Abbildung zweier Kurven desselben Geschlechts aufeinander.

45. Daß die reziproke Kurve dasselbe Geschlecht hat, wie die ursprüngliche [Nr. 40 (9)], ist nur eine Spezialisierung eines viel allgemeineren Theorems, das man ebenfalls RIEMANN verdankt und das lautet:

Kurven, die sich eindeutig aufeinander beziehen (abbilden) lassen, haben dasselbe Geschlecht p.

Für diesen Satz, von dessen Richtigkeit für $p = 0$ wir uns schon oben überzeugten, geben wir einen geometrischen Beweis, der von ZEUTHEN und BERTINI[42]) fast gleichzeitig gegeben wurde. Wir denken uns zwei Kurven resp. vom n^{ten} und n'^{ten} Grade C_n bez. $C_{n'}$, von den Klassen ν bez. ν', mit r bez. r' Spitzen und den Geschlechtszahlen p bez. p'. Die beiden Kurven seien durch irgendeine nicht transzendente Relation punktweise ein-eindeutig einander zugeordnet.

Nun betrachten wir eine Kurve Γ, die den Ort der Durchschnittspunkte der Geraden AP und $A'P'$ bildet, wo A, A' irgend zwei feste Punkte der Ebene und P, P' zwei entsprechende Punkte der beiden Kurven sind.

Die Ordnung von Γ erhalten wir nach dem CHASLESschen Korrespondenzprinzip (S. 61) leicht $= n + n'$, wenn wir nur die einer beliebigen Geraden G angehörenden Punkte

[41]) Zur Aufstellung der Parameterdarstellung einer Quartik mit 3 Doppelpunkten hat SCHMITZ in dem zitierten Programm[40]) ein ausgerechnetes Beispiel gegeben (S. 49—51).

[42]) Compt. rend. Ac. sc. Paris **52**, 1869, S. 742 bez. Giorn. di Mat. **7**, 1869, S. 105—106. ZEUTHEN gab bald darauf eine erweiterte Formel (s. Nr. 91, Beisp. 2), für den Fall, daß die Beziehung nicht eindeutig ist, in Math. Ann. **3**, 1871, S. 150—156.

von Γ suchen. Wir bekommen aber eine bessere Einsicht besonders in die Rolle, welche die beiden Fundamentalpunkte A, A' auf Γ spielen, wenn wir die Schnittpunkte etwa auf einer Geraden durch A abzuzählen suchen. Jeder solchen Geraden durch A entsprechen n Gerade durch A' und die Schnittpunkte dieser n Geraden mit der ersteren gehören Γ an. Außerdem schneidet die erstere Gerade die Kurve Γ noch in einer Anzahl von Punkten, die in A hineinfallen. A ist aber offenbar ein n'-facher Punkt der Kurve Γ, da der Geraden AA' als zum Büschel A' gehörig n' Richtungen durch A entsprechen. Wir erhalten also auch auf diesem Wege die Ordnung von Γ als $n + n'$. Dieselbe Betrachtung hätte für eine Gerade durch A', der ein n-facher Punkt auf Γ ist, durchgeführt werden können.

Um die Klasse von Γ zu bestimmen, haben wir die Anzahl der Tangenten von einem Punkte aus, etwa von A, anzugeben. Da aber dieser Punkt ein n'-facher ist, fallen schon $2n'$ Berührungspunkte dort zusammen. — Wir bemerken ferner, daß jede Tangente von A an die C_n, da ihr (unter andern) zwei zusammenfallende Gerade durch A' entsprechen, auch Tangente an Γ werden muß. Dies gibt ν weitere Berührungspunkte. — Ferner muß auch jede Gerade durch eine Spitze von C_n Tangente an Γ werden, da, wie schon öfters hervorgehoben, in der Spitze zwei konsekutive Punkte koinzidieren. Die Zahl r ist aber eventuell um die Zahl $\boldsymbol{r}$ derjenigen Spitzen zu vermindern, die wieder Spitzen in $C_{n'}$ entsprechen.

So wird die Klasse von Γ gleich

$$2n' + \nu + r - \boldsymbol{r}.$$

Zählt man aber die Berührungspunkte der Tangenten von A' aus ab, so ergibt sich ebenso

$$2n + \nu' + r' - \boldsymbol{r}.$$

Durch Gleichsetzung beider Ausdrücke erhält man

$$\nu + r - 2n = \nu' + r' - 2n'$$

oder nach der ersten Formel von Nr. 40 (10)

$$2(p-1) = 2(p'-1)$$

und schließlich $p = p'$, womit der geforderte Beweis erbracht ist.

2. Rationale Kubiken.

§ 21. Behandlung rationaler Kubiken in der Parameterdarstellung.

46. Wir wollen aber, um die Brauchbarkeit der Parameterdarstellung rationaler Kurven auch für die Zwecke der Aufdeckung geometrischer Eigenschaften darzutun, vermittels derselben, bevor wir uns Neuem zuwenden, noch die rationalen Kurven 3. Ordg.[43]) im allgemeinen behandeln. Doch nicht in der allgemeinsten Form. Wir ziehen es vor, um den algebraischen Apparat zu vereinfachen, eine »kanonische Form« der Gleichung zugrunde zu legen, in die, wie wir später nachweisen werden (s. Nr. 116, Beisp. 2 am Schluß) jede rationale Kubik gebracht werden kann. Diese ist

$$(1) \qquad (x_2^2 - \omega x_1^2)\, x_3 - x_1^3 = 0\,.$$

Die Ecke *III* ist dann Knoten, Spitze, isolierter Punkt, je nachdem $\omega >, =, < 0$ ist[44]). Setzt man wie oben $x_1 = \lambda x_2$, so ergibt sich unschwer die Parameterdarstellung

$$(2) \qquad \begin{cases} \vartheta x_1 = \lambda (1 - \omega \lambda^2) \\ \vartheta x_2 = 1 - \omega \lambda^2 \\ \vartheta x_3 = \lambda^3\,. \end{cases}$$

Hieraus ist zunächst zu entnehmen, daß der singuläre Anfangspunkt die Parameter $\lambda_0 = \pm \sqrt{1/\omega}$ hat. Für $\omega > 0$ findet also ein reeller Durchschnitt statt, so daß die Kurve in zwei Teile zerfällt gedacht werden kann, deren einem die Parameterwerte zwischen $+\sqrt{1/\omega}$ und $-\sqrt{1/\omega}$ über 0, deren anderem die Parameterwerte zwischen $+\sqrt{1/\omega}$ und $-\sqrt{1/\omega}$ über ∞ entsprechen. Je kleiner ω wird, desto mehr verschwindet der zweite Teil, der somit offensichtlich die »Schleife« ist, d. i. der Teil, aus dem durch Auflösen des Knotens (S. 35/36) ein Oval entstehen kann. Für $\omega = 0$ entsteht dann durch vollständiges Zusammenziehen der Schleife eine Spitze, in welcher

---

[43]) Eine vollständige Behandlung der rationalen Quartiken in der Parameterdarstellung siehe bei A. Brill *„Über rationale Kurven vierter Ordnung"*. Math. Ann. **12**, 1877, S. 89 ff.

[44]) Vgl. für das Folgende H. Durège *„Über fortgesetztes Tangentenziehen an Kurven 3. Ordnung mit einem Doppel- oder Rückkehrpunkte"*. Math. Ann. **1**, 1869, S. 509—532.

der Parameter durch das Unendliche geht. Wird sodann ω negativ, so tritt das Merkwürdige ein, daß der Doppelpunkt gar nicht mehr auf dem jetzt ununterbrochenen Zweig (»Serpentine«) liegt, dessen Punkte den reellen Werten des Parameters von $-\infty$ bis $+\infty$ entsprechen. Er entsteht vielmehr, indem für zwei konjugiert imaginäre Parameterwerte der Schnittpunkt zweier imaginären Zweige in die Erscheinung tritt[45]).

Wir wollen nun zunächst eine Bedingung für drei Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ aufstellen, so daß die drei entsprechenden Kurvenpunkte auf einer Geraden liegen. Zu diesem Zwecke könnte man die bekannte Determinante der neun Koordinaten benützen; dann gäbe aber erst eine größere Umformung die gewünschte einfache Bedingung. Es ist besser, wir setzen die Werte für ϑx_i in die Gleichung einer beliebigen Geraden $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ ein; dies ergibt, nach λ geordnet, die Gleichung für die Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der Schnittpunkte:

$$(2) \qquad \lambda^3 (a_3 - a_1 \omega) - \lambda^2 a_2 \omega + a_1 \lambda + a_2 = 0\,.$$

In dieser Gleichung können aber nicht alle Koeffizienten willkürlich genommen werden. Der Koeffizient von λ^2 unterscheidet sich von dem Koeffizienten von λ^0 nur um den Faktor $-\omega$. Der eine ist aber der Summe, der andere dem Produkt der drei Wurzeln proportional. Für drei Punkte auf einer Geraden mit den Parametern $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ist also immer

$$(3) \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \omega \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 0\,.$$

Dies ist die gewünschte Bedingung.

Aus dieser Gleichung läßt sich vieles entnehmen. Wir wollen von einem Kurvenpunkt (τ) aus — dies sei der Punkt mit dem Parameter τ — die Tangenten an die Kurve legen. Ist ein Berührungspunkt (β), so muß nach (3)

$$(4) \qquad \tau + 2\beta + \omega \tau \beta^2 = 0$$

sein. Diese Gleichung gibt im allgemeinen 2 Berührungs-

---

[45]) Die Kurve kann also bei Existenz von isolierten Punkten nicht mehr in einem Zuge durchlaufen werden. Deshalb erscheint uns die Bezeichnung »Unikursalkurven«, die, von CAYLEY eingeführt, in England allgemein und auch bei uns vielfach üblich ist, doch nicht ganz einwandfrei.

punkte — die Klasse ist ja 4 und die in (τ) selbst berührende Tangente, die hier nicht auftritt, gilt für 2 —, oder wenn man den Berührungspunkt (β) gibt, liefert Gleichung (4) den einen weiteren Schnittpunkt (τ) der Tangente mit der Kurve, den »Tangentialpunkt« von (β).

Die Diskriminante von (4) ist $\Delta \equiv 1 - \omega \tau^2$. Daraus ist ersichtlich, daß es für $|\tau| < \sqrt{1/\omega}$, d. h. für einen Tangentialpunkt auf der Schleife keine reellen Tangenten gibt, während für die Form mit isoliertem Punkt eine solche Ausnahme nicht existiert. Für $\tau = \pm\sqrt{1/\omega}$, also im Doppelpunkt fallen die beiden Berührungspunkte (β) zusammen, und zwar in den Doppelpunkt selbst; es ergibt sich $\beta = \mp\sqrt{1/\omega}$ als Parameter des Berührungspunktes, d. h. die Tangente von dem einen der im Doppelpunkt koinzidierenden Punkte an die Kurve fällt mit der Tangente in dem andern zusammen.

Für $\omega = 0$ erhält Gleichung (4) eine unendlich große Wurzel β, wie man sich in der Algebra ausdrückt; d. h. zieht sich die Schleife auf eine Spitze zusammen, so geht von jedem Kurvenpunkt nur noch eine Tangente an die Kurve $[\beta_1 = -\frac{1}{2}\tau]$, da die zweite von der Spitze absorbiert wurde $[\beta_2 = \infty]$. So sieht man an diesem Beispiel auch rechnerisch, wie das Auftreten einer Spitze statt eines Doppelpunktes die Klasse um eine weitere Einheit erniedrigt.

47. Fällt der Tangentialpunkt mit dem Berührungspunkt zusammen, so entsteht ein Wendepunkt (w). Die Gleichung für die Parameter der Wendepunkte lautet also

$$3w + \omega w^3 = 0. \tag{5}$$

Es gibt folglich deren 3 mit den Parametern

$$w_1 = 0; \quad w_{2,3} = \pm\sqrt{-3/\omega}.$$

Diese drei Wendepunkte sind ersichtlich nur für $\omega < 0$, d. h. im Fall des isolierten Punktes alle drei reell, während für $\omega > 0$ nur der in der Ecke *II* liegende reell ist. Man sieht hier wiederum deutlich, daß die Spitze 2 Wendepunkte absorbiert.

Wir erhalten ferner, da

$$w_1 + w_2 + w_3 + \omega w_1 w_2 w_3 = 0,$$

im allgemeinen den Satz, *daß die drei Wendepunkte einer rationalen Kubik auf einer Geraden liegen* (vgl. Nr. 100).

Legt man durch den ersten Wendepunkt eine beliebige Gerade, so ergibt sich aus (3), wegen $\lambda_1 = 0$, für ihre Schnittpunkte mit der Kurve $\lambda_2 = -\lambda_3$. Diese beiden Punkte werden aus der Ecke *III* durch die Geraden $x_1 - \lambda x_2 = 0$ und $x_1 + \lambda x_2 = 0$, die zu den Seiten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ harmonisch liegen, projiziert. Mit andern Worten: Legt man durch einen Wendepunkt W irgend eine Sehne, die die Kurve noch in S_1, S_2 schneidet, so liegt der zu W, S_1, S_2 gehörige vierte harmonische Punkt auf $x_2 = 0$. $x_2 = 0$ ist also die harmonische Polare (s. Nr. 31, Beisp. 2) des Wendepunkts. Die quadratische Polare des Wendepunkts (Ecke *II*) ist in der Tat $x_2 x_3 = 0$ [$x_3 = 0$ ist die Wendetangente, $x_1 = 0$ die Verbindungslinie von Doppelpunkt und Wendepunkt].

Von jedem Wendepunkte geht nur noch e i n e Tangente an die Kubik. Der Berührungspunkt wird durch die harmonische Polare des Wendepunktes ausgeschnitten; seinen Parameter erhält man aus (4). Er ist $= \infty$.

Aufgabe. Stelle die Gleichungen der drei Wendetangenten, sowie die der drei harmonischen Polaren auf und zeige, daß je zwei Wendetangenten sich auf der harmonischen Polare des dritten Wendepunktes schneiden. Da die drei harmonischen Polaren sämtlich durch den Doppelpunkt (Ecke *III*) gehen, erhält man ihre Gleichungen am einfachsten, indem man, wie vorhin angedeutet, die Parameter der Berührungspunkte der von den Wendepunkten ausgehenden Tangenten bestimmt.

ABSCHNITT VI.

DAS ANALYTISCHE DREIECK. ASYMPTOTEN. KURVENDISKUSSION.

§ 22. Das analytische Dreieck.

48. Mit dem vorigen Abschnitt haben wir ein Gebiet vorläufig abgeschlossen, welches man das Gebiet der Polarentheorie nennen könnte. Freilich, müssen wir hinzufügen, gemäß unserer Darstellung. Eine Theorie ist ja nie etwas anderes als eine Zusammenfassung bekannter Tatsachen nach gewissen leitenden Gesichtspunkten. Mit diesen Gesichtspunkten ändert sich natürlich auch die Gruppierung der Tatsachen. So könnte man die PLÜCKERschen Formeln ganz von der Polarentheorie trennen und sie, wie dies auch schon verschiedentlich geschah, vermittels der später (in Abschn. IX) zu behandelnden Korrespondenztheorie herleiten[46]).

In diesem Abschnitt gedenken wir uns einigen Untersuchungen zuzuwenden, die sich mehr mit der Gestalt der Kurven, also mit dem Problem beschäftigen, anzugeben, welche Form eine Kurve von gegebener Gleichung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ hat. Diese Untersuchungen können naturgemäß, im Gegensatz zu den vorausgegangenen, keinen invarianten Charakter tragen. Im Gegenteil, gerade das Unendlichferne wird die äußere Erscheinung der Kurve wesentlich beeinflussen.

49. Eine vorgegebene Gleichung wird in den seltensten Fällen alle Glieder enthalten. Um einen raschen und

---

[46]) Vgl. etwa O. ZIMMERMANN: *„Neue Ableitung der Plückerschen Gleichungen usw.“* Journ. f. Math. **123**, 1901, S. 1—32, 175 bis 209. Siehe auch das Beisp. 1 von Nr. 91.

sicheren Überblick zu erhalten, welche Glieder die Gleichung hat, und besonders um zu beurteilen, welche Glieder von Wichtigkeit für die Gestalt der Kurve sind, ist eine schon von NEWTON (L. V.) angewendete, dann besonders von dem lange vergessenen DE GUA (L. V.) und CRAMER (L. V.) ausgebildete geometrische Darstellung sehr nützlich, die darauf beruht, daß die Anzahl $\frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \binom{n+2}{2}$ der Glieder einer Gleichung n^{ten} Grades eine sog. »Dreieckszahl« ist[47]). D. h. teilt man jede der drei Seiten eines Dreiecks, das man, wenn die Gleichberechtigung der drei Variablen betont werden soll, gleichseitig denken mag, und dessen Ecken und Seiten denen des Koordinatendreiecks entsprechen, in n Teile und verbindet die Teilpunkte durch Parallele mit den Seiten, so gibt es gerade $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Eckpunkte der kleinen Teildreiecke und wir können jedem Eckpunkt ein Glied der Gleichung zuweisen, wie dies in Fig. 10 für den Fall $n = 4$ dargestellt ist. Merkt man sich in diesem Diagramm, das wir »analytisches Dreieck« heißen, die Glieder an, die die Gleichung wirklich enthält, so können wir, wie wir im folgenden sehen werden, aus der Umfangslinie eines überall konvexen Polygons, das durch die äußersten Glieder gebildet wird und das wir »analytisches Polygon« nennen wollen, sofort eine Menge Schlüsse auf das Verhalten der Kurve zum Fundamentaldreieck ziehen. Wir haben in der Figur auch gleich die drei Variablen x, y, z genannt, da im vorliegenden Abschnitt als dritte Koordinatenseite fast immer die unendlichferne Gerade fungieren wird. Man macht dann zumeist, was jedoch ohne alle Bedeutung ist, um anzudeuten, daß

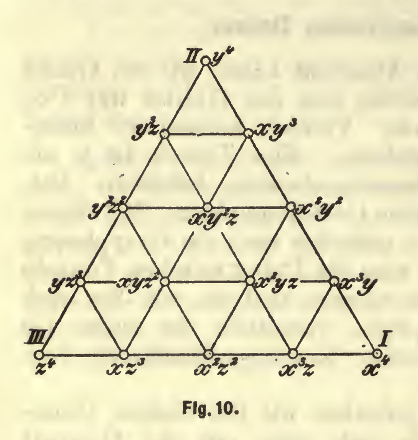


Fig. 10.

[47]) Siehe etwa SCHUBERT, *Niedere Analysis* I, S. S. V, S. 44.

das Koordinatensystem ein rechtwinkliges sei, die Ecke *III* des analytischen Dreiecks rechtwinklig und das Dreieck selbst gleichschenklig-rechtwinklig.

§ 23. Bestimmung der Asymptoten einer Kurve.

50. Wir bemerken zuvörderst, daß wir, nachdem die Gleichung auf das analytische Dreieck »gelegt« ist, dieselbe als nach x, y, z geordnet ablesen können, je nachdem wir den Parallelen folgen, die den Ecken *I*, *II*, *III* gegenüberliegen. Das Aggregat der Glieder, die auf einer Koordinatenseite selbst liegen, gibt gleich Null gesetzt die Gleichung für die Schnittpunkte der betreffenden Koordinatenseite mit der Kurve. Von diesen sind die auf der dritten Koordinatenseite liegenden, also die Unendlichfernen, einer besonderen Betrachtung zu unterziehen. Wir erhalten zur Bestimmung dieser Punkte [für $z = 0$] das Aggregat der Glieder höchster Dimension in x und y, eine Gleichung n^{ten} Grades zur Bestimmung von n durch den Anfangspunkt (Ecke *III*) nach den n unendlichfernen Punkten der Kurve gehenden Strahlen, die zunächst alle verschieden sein mögen.

Um aber einen klaren Einblick zu bekommen in die Art, wie die Kurve in allen diesen Punkten durch das Unendliche geht, ist es nötig, dort die Tangenten zu bestimmen, die man (geradlinige) »Asymptoten« nennt, welchen Ausdruck wir schon hin und wieder als aus der Theorie der Kegelschnitte bekannt benutzt haben. Diese Tangenten aufzustellen, gelingt nun sicher, und das wird das nächste sein, an was der unbefangene Leser denken mag, indem man, wenn für einen bestimmten unendlichfernen Punkt etwa $y/x = \theta$ ist, in die gewöhnliche Gleichung der Tangente

$$x f_1' + y f_2' + z f_3' = 0$$

an Stelle der gestrichenen Koordinaten x', y', z', die hier für y_1, y_2, y_3 stehend gedacht sind, die Werte $x' = 1$, $y' = \theta$, $z' = 0$ setzt. Dieses Verfahren ist aber umständlich und wenig durchsichtig, da es eben für jeden einzelnen unendlich fernen Punkt wiederholt werden müßte und die Bestimmung von f_1' und f_2' ganz unnötige Arbeit macht, da wir ja schon wissen, daß die Gleichung der Asymptote als zur Geraden $y - \theta x = 0$ parallel die Form haben muß

$$y - \theta x + \lambda z = 0\,.$$

Es ist also eigentlich nur noch λ zu bestimmen. Wir bekommen nun offenbar eine Bestimmungsgleichung für λ, wenn wir in die Gleichung $f = 0$ $y = \theta x - \lambda z$ mit der Bedingung einsetzen, daß die entstehende Gleichung nicht nur eine Wurzel $z = 0$, sondern deren zwei habe [oder zwei Wurzeln $x = \infty$], da ja die Asymptote berührt, während jede Parallele zu ihr durch den Berührungspunkt nur einfach hindurchgeht.

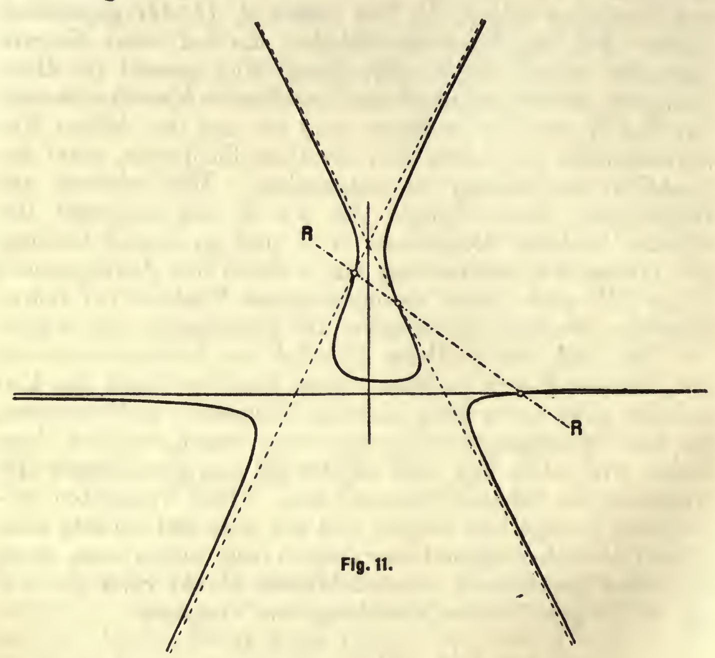


Fig. 11.

51. Um aber die Vorstellungen zu fixieren, gehen wir von einer bestimmten Kurve dritter Ordnung aus mit der Gleichung

$$(1)\quad f \equiv 8y^3 - 32x^2y - 32y^2z + 36yz^2 + 3xz^2 - 6z^3 = 0 .$$

Dieselbe ist in Fig. 11 dargestellt. Das Aggregat der höchsten Glieder in x, y gibt, von überflüssigen Koeffizienten befreit und zerlegt,

$$(2)\quad y(y + 2x)(y - 2x) = 0 .$$

Da man sofort sieht, daß $y = 0$ auch das in x, y quadratische Glied $-32y^2z$ verschwinden macht, so daß in der noch übrigen Gleichung z quadratisch vor die Klammer tritt

$$(3) \qquad 3z^2(x-2z) = 0,$$

so ist ohne weiteres klar, daß $y = 0$ selbst Asymptote ist, und wir erhalten aus (3) nur noch den weiteren Schnittpunkt $x = 2$ mit der x-Achse.

Nun haben wir $y = 2x - \lambda z$ in f einzusetzen. Dann wird der Koeffizient von x^3 selbstverständlich Null, der von x^2z wird $32(-3\lambda + \lambda - 4)$, woraus sich, da derselbe verschwinden muß, $\lambda = -2$ ergibt. Die zweite Asymptote ist also $y - 2x - 2z = 0$, und ebenso ergibt sich die dritte zu $y + 2x - 2z = 0$. Die Gleichung $f = 0$ liefert dann in jedem Falle noch die weiteren Schnittpunkte der Asymptote mit der Kurve. Doch ist dies schon bei Kubiken eine ziemlich langwierige Rechnung.

Wir können aber die Frage noch wesentlich allgemeiner fassen und lösen, wenn wir daran denken, daß die Gleichung $f = 0$, wenn $y - \theta_i x + \lambda_i z = 0$ die Gleichung einer Asymptote ist, sich in der Form muß schreiben lassen (vgl. Fußnote 19):

$$(4) \quad (y-\theta_1 x+\lambda_1 z)(y-\theta_2 x+\lambda_2 z)\dots(y-\theta_n x+\lambda_n z)+z^2\Phi = 0,$$

wo Φ eine ternäre Form $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung in x, y, z ist. Ist $\Psi = 0$ das System aller Asymptoten, so kann man diese Gleichung einfacher schreiben

$$(4^*) \qquad f \equiv \Psi + z^2\Phi = 0,$$

d. h. die Kurve $f = 0$ wird von $\Psi = 0$ in allen Punkten berührt, wo zugleich $z = 0$ ist. $\Phi = 0$ gibt dann auf jeder Asymptote noch die $(n-2)$ weiteren Schnittpunkte. Nun ist aber

$$(5) \quad \begin{cases} \Psi \equiv \prod\limits_{1}^{n}{}^{i}(y-\theta_i x) + \sum\limits_{1}^{n}{}^{i}\lambda_i z \prod\limits_{1}^{n(j\neq i)}{}^{j}(y-\theta_j x) + z^2\Phi_1 \\ \quad \equiv u^{(n)} + u^{(n-1)}z + \Phi_1 z^2. \end{cases}$$

Dividiert man hier das zweite Glied durch das erste, so ergibt sich

$$\frac{u^{(n-1)}}{u^{(n)}} = \sum_{1}^{n}{}^{i}\frac{\lambda_i}{y-\theta_i x} = \frac{\lambda_1}{y-\theta_1 x} + \frac{\lambda_2}{y-\theta_2 x} + \dots + \frac{\lambda_n}{y-\theta_n x}.$$

Daher hat man für die Bestimmung der Asymptoten folgende Regel:

Zerlegt man $\frac{u^{(n-1)}}{u^{(n)}}$ *in Partialbrüche, so sind die Zähler die gesuchten Konstanten zur Parallelverschiebung der durch* $u^{(n)} = 0$ *gegebenen, zu den Asymptoten parallelen Geraden.*

Für unsere Kurve erhält man

$$\frac{u^{(n-1)}}{u^{(n)}} = -\frac{4y^2}{y(y-2x)(y+2x)}.$$

Hier hebt sich auch gleich y weg und es ist nur mehr Der Bruch $\mathfrak{B} \equiv \frac{-4y}{(y-2x)(y+2x)}$ zu zerlegen. Wir setzen diesen Bruch, um doch ein Beispiel durchzuführen,

$$\mathfrak{B} = \frac{A}{y-2x} + \frac{B}{y+2x} = \frac{y(A+B) + 2x(A-B)}{(y-2x)(y+2x)},$$

woraus

$$A - B = 0; \quad A + B = -4,$$

was sofort $A = B = -2$, mithin die obigen Asymptoten ergibt. Bringen wir dann die Gleichung in die Form (4), so lautet sie:

$$8y(y + 2x - 2z)(y - 2x - 2z) + (3x + 4y - 6z)z^2 = 0,$$

wobei $\Phi \equiv 3x + 4y - 6z$ ist. Hieraus ergibt sich für Kubiken speziell der von Plücker zur Einteilung der Kurven 3. Ordg. verwendete Satz, *daß die drei Schnittpunkte einer Kubik mit den Asymptoten auf einer Geraden liegen* (vgl. Abschn. XI). Da sich diese Gerade (R in der Figur), die sog. »Begleiterin der unendlich fernen Geraden« sehr leicht genau zeichnen läßt, ist es unnötig, die Koordinaten der Schnittpunkte selbst zu berechnen.

Bem. Ist $u^{(n-1)} \equiv 0$, so gehen alle Asymptoten durch den Anfangspunkt und sind schon durch $u^{(n)} = 0$ dargestellt.

52. Unsere Betrachtung ändert sich in keiner Weise, wenn ein Paar der Asymptoten imaginär wird. Dann bleibt nur ihr Schnittpunkt, den Plücker »Asymptotenpunkt« nannte, reell. Für die Kissoide (vgl. Nr. 37 Beisp.)

$$x(x^2 + y^2) - 2ry^2z = 0$$

erhält man z. B. die Zerlegung

$$-\frac{2ry^2}{x(x^2+y^2)} = -\frac{2r}{x} + \frac{ri}{y+ix} - \frac{ri}{y-ix}$$

und die Kurvengleichung läßt sich schreiben:

$$(x-2rz)[y^2+(x+rz)^2] + r^2(3x+2rz)z^2 = 0 .$$

Die Begleiterin der unendlich fernen Geraden ist zur reellen Asymptote parallel, weshalb diese dreipunktig (in einem Wendepunkt) berühren muß. In der Tat ergibt sich aus der Kurvengleichung für $x = 2rz$ $z^3 = 0$. Der Asymptotenpunkt ist $y = 0$, $x = -r$. Die Kissoide hat dieselben Asymptoten, wie jeder Kreis um diesen Punkt, wird also von dem konzentrischen Kreisbüschel (= Schar) um diesen Punkt in den imaginären Kreispunkten doppelt berührt.

Aus diesem Beispiel mag man auch gleich die Art der Annäherung der Kurve an eine Wendeasymptote ersehen: die Kurve bleibt (im Endlichen) auf derselben Seite der Geraden, während sie im Fall einer gewöhnlichen Asymptote wie bei der Hyperbel die Seite wechselt. In Wirklichkeit überschreitet natürlich gerade im Falle der Wendeasymptote die Kurve ihre Tangente; der Widerspruch der äußeren Erscheinungsform mit einer etwa vorgefaßten Meinung kommt davon her, daß die Gerade, topologisch betrachtet, nur eine einzige Seite hat, nicht zwei wie ein Kreis, bei dem man ohne Überschreiten der Kurve nie aus dem Innern heraus gelangen kann. Dieselbe Eigenschaft der »Einseitigkeit«, die zuerst bei Betrachtung der Hyperbelasymptoten auffällt, zeigt jede Kurve ungerader Ordnung. Geht also eine Kurve durchs Unendliche und bleibt im Endlichen auf derselben Seite der Asymptote, so müssen wir konsequenterweise annehmen, daß sie dieselbe im Unendlichen überschritten hat.

Beisp. Als weiteres Beispiel möge, besonders wegen einer später (in Nr. 114) wieder auftretenden Zerlegung das Descartessche Blatt behandelt werden. Die Gleichung desselben lautet bekanntlich (s. Nr. 36 Beisp.)

$$y^3 + x^3 - 3axyz = 0 .$$

Die Zerlegung von $y^3 + x^3$ ergibt

$$(y+x)(y^2-xy+x^2) \equiv (y+x)(y+\varepsilon x)(y+\varepsilon^2 x) ,$$

wo $\varepsilon^3 = 1$, $1+\varepsilon+\varepsilon^2 = 0$ $[\varepsilon = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})]$ ist.

Man findet dann die Partialbruchzerlegung[48])

$$\frac{-3\,a\,x\,y}{y^3+x^3}=\frac{a}{y+x}+\frac{a\,\varepsilon^2}{y+\varepsilon\,x}+\frac{a\,\varepsilon}{y+\varepsilon^2\,x}\,.$$

Zur Herstellung der Form (4) überzeuge man sich zuerst durch Ausmultiplizieren von der Richtigkeit der Formel:

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} (y+x+a\,z)\,(y+\varepsilon\,x+a\,\varepsilon^2\,z)\,(y+\varepsilon^2\,x+a\,\varepsilon\,z) \\ \qquad \equiv y^3+x^3+a^3\,z^3-3\,a\,x\,y\,z\,; \end{cases}$$

dann sieht man, daß die Gleichung unserer Kurve so geschrieben werden kann:

$$(y+x+a\,z)\,(y+\varepsilon\,x+a\,\varepsilon^2\,z)\,(y+\varepsilon^2\,x+a\,\varepsilon\,z)-a^3\,z^3=0\,,$$

welche Form alle drei Asymptoten als Wendeasymptoten charakterisiert. Die Begleiterin der unendlich fernen Geraden fällt mit dieser selbst zusammen und ist zugleich die Gerade der drei Wendepunkte der C_3^4 (vgl. Nr. 47).

§ 24. **Das Auflösen von Knoten.**

53. Wir sind nun auch imstande, etwas genauer anzugeben, wie die »Auflösung« eines Knotens (Nr. 24a, Beisp.) vor sich geht. Ist die Gleichung einer Kurve

$$f(x,y,z)=0$$

und wir betrachten für sehr kleines λ eine Kurve

$$f(x,y,z)-\lambda\,z^n=0\,,$$

so wird diese neue Kurve die ursprüngliche im Endlichen nirgends schneiden, aber sehr nahe an derselben verlaufen. Hat also $f=0$ einen Knoten, so ist dieser bei $f=\lambda$ aufgelöst, wie dies die Fig. 2 zeigte. Beide Kurven haben dieselben Asymptoten und berühren sich in dem unendlichfernen Punkte jeder Asymptote n-punktig. Eine solche Betrachtung ist demnach besonders vorteilhaft, wenn f gar nicht reell durchs Unendliche geht. Wir verweisen hier einstweilen auf Plückers klassisches Beispiel in Nr. 133 (Fig. 55). Der-

[48]) Es ist natürlich für den, der etwa nur die reelle Asymptote kennen will, nicht nötig, die ganze Zerlegung zu machen, da man im Falle nur linearer Nenner jeden einzelnen Zähler für sich bestimmen kann. Siehe etwa Bauers *Vorlesungen über Algebra* (Teubner 1903), S. 37.

selbe Gedankengang bleibt immer noch anwendbar, wenn wir anstatt $f = 0$ eine Kurve

$$f_1 \equiv f(x, y, z) - \lambda \Phi^{(\nu)} z^{n-\nu} = 0$$

nehmen. f_1 geht dann durch alle Schnittpunkte von f und Φ und hat immer noch dieselben Asymptoten wie f, solange $\nu \leqq n - 2$.

Ganz gleichgültig ist dabei, ob f eine eigentliche oder eine zerfallene n-ik ist. Im Gegenteil, wir können, wenn wir von einer zerfallenen C_n ausgehen, durch den Prozeß des Knotenlösens die Formen irreduzibler Kurven n^{ter} Ordnung auf sehr leichte und anschauliche Weise ableiten, wie auch deren Gleichungen. Man nehme nur etwa einen Kegelschnitt und eine Gerade, so erhält man alle singularitätenfreien Kubiken; ebenso wenn man von drei Geraden ausgeht, falls man nur noch die Begleiterin der unendlich fernen Geraden jedesmal angibt. Nimmt man zwei Kegelschnitte oder einen Kegelschnitt und zwei Gerade, oder vier Gerade oder eine Kubik und eine Gerade, nebst einer (zerfallenen oder nicht zerfallenen) C_2 als Ort für die Durchschnittspunkte der Asymptoten mit der Kurve, so erhält man alle singularitätenfreien Formen der Quartiken. Da wir noch öfters Gelegenheit haben werden, von diesen Umformungen Gebrauch zu machen, geben wir nur wenige Beispiele. Auch die Kubik der Nr. 51 kann als solches betrachtet werden.

Beisp. 1. Wir wollen als zerfallene C_3 den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ nebst der x-Achse $[y = 0]$ nehmen. Dann stellt

$$(x^2 + y^2 - r^2)\, y - \lambda = 0$$

eine Kubik vor mit der x-Achse als Wendeasymptote, deren unendlicher Zweig entweder oben oder unten von dieser Achse verläuft, je nachdem $\lambda \gtrless 0$, während gleichzeitig das Oval sich in dem unteren oder oberen Halbkreis befindet [Fig. 12 (a), Kurve *1*]. Für $\lambda = \pm \frac{2\, r^3}{9} \sqrt{3}$ schrumpft das Oval in einen isolierten Punkt zusammen (Kurve *2*). [Um diesen Wert von λ zu finden, muß man die Diskriminante der Gleichung $y^3 - r^2 y - \lambda = 0$ bilden.]

Nehmen wir aber etwa die Gleichung

$$(x^2 + y^2 - r^2)\, y - \lambda x = 0\,,$$

so hat diese Kurve die x-Achse nur mehr als einfache Asymptote und als dritten Schnittpunkt auf derselben den Anfangspunkt. Die Kurve [Fig. 12 (b)] überschreitet den Kreis in den Punkten, wo dieser die y-Achse schneidet. Sie ist eine einfache Serpentine. Der Anfangspunkt ist Mittelpunkt, da die Kurve, homogen gemacht, in z symmetrisch ist (vgl. Nr. 8, S. 10).

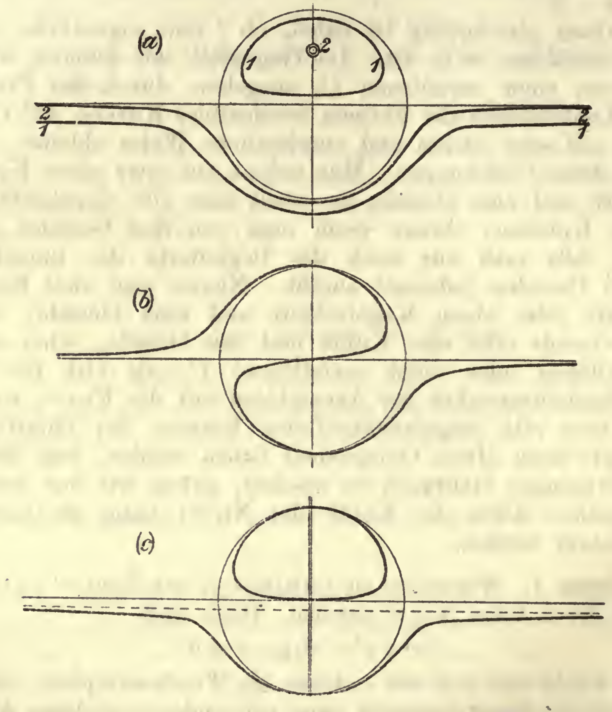


Fig. 12.

Betrachten wir auch noch die Gleichung

$$(x^2 + y^2 - r^2)\, y - \lambda\, x^2 = 0\,,$$

so hat die entsprechende Kurve [Fig. 12 (c)] nur mehr eine zur x-Achse parallele Asymptote $y = \lambda$, die schon wegen der Symmetrie gegen die y-Achse Wendeasymptote sein muß. Die Kurve berührt den Kreis und die x-Achse, wo diese beiden Linien von der y-Achse, die man doppelt gelegt denkt (s. Fig.) geschnitten werden. Usw.

Beisp. 2. Die Gleichung

$$\{y^2 - x^2\}\left\{\left(\frac{y}{2} - 1\right)^2 - x^2\right\} + \mu(y + a) = 0$$

stellt für variables μ ein Büschel von Quartiken dar, die alle

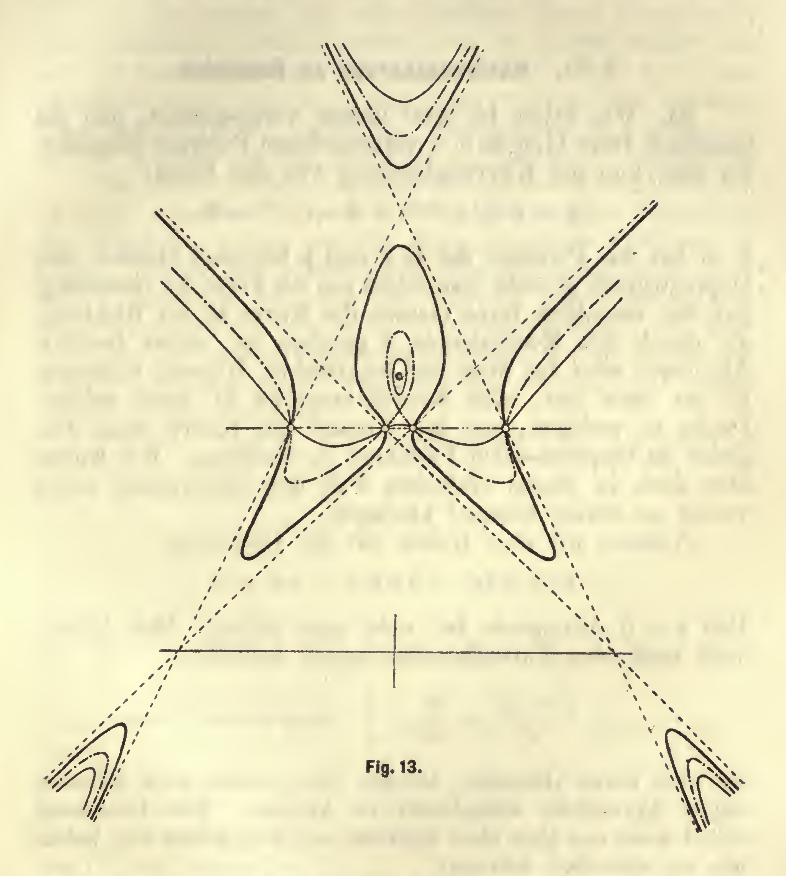


Fig. 13.

dieselben vier Geraden (der geschweiften Klammern) zu Wendeasymptoten haben und die alle durch die vier Schnittpunkte der Geraden $y + a = 0$ mit den Asymptoten gehen (Fig. 13). Der Kegelschnitt C_2 besteht hier aus der unendlich fernen Geraden und $y + a = 0$. Die Figur ist für $-1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} < a < 0$ gezeichnet. Die Kurve mit Knoten ist strichpunktiert. Für die Kurve mit

isoliertem Punkt ist der unendliche Zweig nicht mehr gezeichnet[49]). Der Leser bestimme den Parameter μ für diese singulären Kurven und betrachte etwa auch die Grenzfälle für $a = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (Spitze!) und $a = 0$.

§ 25. Näherungskurven an Beispielen.

54. Wir haben bis jetzt immer vorausgesetzt, daß die unendlich ferne Gerade in n verschiedenen Punkten schneidet. Ist aber nun die Kurvengleichung von der Form

$$(y - \theta x)^2 \varphi^{(n-2)} + z \cdot \psi^{(n-1)} = 0,$$

d. h. hat das Polynom der in x und y höchsten Glieder eine Doppelwurzel, so sieht man schon aus der Form der Gleichung, daß die unendlich ferne Gerade die Kurve in der Richtung, die durch den Koeffizienten θ gegeben ist, selbst berührt. Ähnliches wird bei drei- und mehrfachen Wurzeln eintreten. Es ist dann gut, eine Koordinatenecke in einen solchen Punkt zu verlegen, um den Verlauf der Kurve nach dem gleich zu besprechenden Verfahren zu studieren. Wir wollen aber doch in einem einfachen Fall den Sachverhalt schon vorher an einem Beispiel klarlegen.

Nehmen wir eine Kubik mit der Gleichung

$$x^2 y + (y^2 - 2xy) z - x z^2 = 0.$$

Daß $y = 0$ Asymptote ist, sieht man sofort. Man könnte auch noch eine Partialbruchzerlegung aufstellen

$$\frac{y - 2x}{x^2} = \frac{y}{x^2} - \frac{2}{x} \quad \text{[durch einfache Division]}$$

hat aber keine Garantie, hieraus eine, wenn auch krummlinige Asymptote entnehmen zu können. Die Gleichung selbst weist uns aber ohne weiteres auf eine solche hin, indem wir sie schreiben können:

$$y(x^2 - 2xz + yz) - xz^2 = 0,$$

---

[49]) Figur und Gleichung sind nach A. Beers „*Tabulae curvarum quarti ordinis etc.*“, Bonn 1852, 35 Tafeln, die in etwas mangelhafter Ausführung Zeichnungen zur Diskussion obiger und ähnlicher Gleichungen enthalten.

wonach sich die Parabel der runden Klammer, die man auch in die Form

$$(x-1)^2+(y-1)=0$$

bringen kann [Scheitel (1, 1)] als asymptotische Linie ergibt, d. h. als eine solche, die zur unendlich fernen Geraden in einer ähnlichen Beziehung steht, wie die Kubik selbst. In der Tat oskuliert diese Parabel die Kubik in dem fraglichen unendlich fernen Punkt fünfpunktig, während ihr sechster Schnittpunkt mit der Kubik der Anfangspunkt ist. In Fig. 14 ist die Kubik mit der gefundenen Parabel (*1*) dargestellt.

Die krummlinigen Asymptoten von zweiter und höherer Ordnung wurden schon von Newton benutzt zur Einteilung der Kubiken, später hat sie dann besonders Plücker in seiner „*Theorie der algebraischen Kurven*" behandelt. Über dessen Resultate ist, auf der Theorie der algebraischen Funktionen fußend, nur Stolz[50]) hinausgegangen. Das Vorherrschen der projektiven Auffassung hat sie eben als minder wichtig zurückgedrängt, weshalb auch wir uns nicht weiter darauf einlassen können.

55. Wir kehren zur Betrachtung des analytischen Dreiecks zurück. Das Aggregat der Glieder auf einer Seite gab die Schnittpunkte der Kurve mit eben dieser Koordinatenseite. Ist nun eine Ecke, etwa *III*, unbesetzt, so rückt sowohl für die x- wie für die y-Achse je ein Schnittpunkt in den Anfangspunkt, d. h. die Kurve geht durch die Ecke *III*. Sind die beiden von dieser Ecke aus zunächst folgenden Glieder vorhanden, so gibt ihr Aggregat die Tangente in dieser Ecke. Ist nur eines derselben da, so ist eine Achse selbst Tangente. Fehlen beide, so geben die drei nächstfolgenden auf einer Geraden

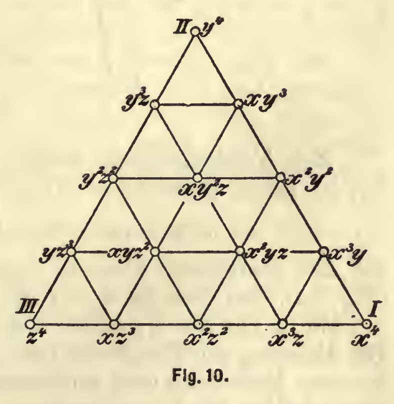


Fig. 10.

[50]) „*Allgemeine Theorie der Asymptoten der algebraischen Kurven*", Math. Ann. **11**, 1877, S. 41—83.

liegenden Glieder die beiden Tangenten des dann vorhandenen Doppelpunkts. So sieht man nun sofort, daß eine Quartik mit drei Doppelpunkten in den Koordinatenecken nur die Glieder x^2y^2, x^2yz, xy^2z, x^2z^2, xyz^2 und y^2z^2 enthalten darf (vgl. Aufgabe 2 in Nr. 19). All dies ist uns schon bekannt. Wir wollen nur den Leser daran gewöhnen, dasselbe aus dem analytischen Dreieck abzulesen.

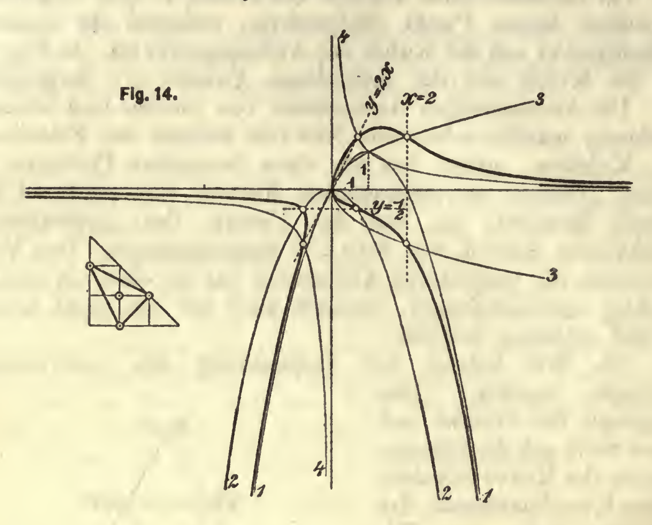


Fig. 14.

Zur Verdeutlichung wollen wir nun etwa gleich die in Nr. 54 schon betrachtete Kubik

$$x^2y + (y^2 - 2xy)z - xz^2 = 0$$

auf das analytische Dreieck legen. Wir sehen dann sofort (Fig. 14), daß dieselbe durch die drei Ecken geht und zwar hat sie in III $x = 0$, in II $z = 0$, in I $y = 0$ als Tangente. Bei Ablesung der Tangenten (und später der Näherungskurven) für eine Ecke muß man nur immer, um überflüssige Faktoren abzuscheiden, die Koordinate, deren höchste Potenz in der Ecke steht, $= 1$ setzen. Diese Tangenten sagen freilich noch recht wenig aus. Es wäre wünschenswert, wie oben für die Ecke II, so für jede Ecke eine oskulierende Kurve zu erhalten. Eine solche Kurve heißt dann »Näherungskurve« in dem Sinn, daß sie sich in dem bestimmten Punkte, solange es nur

auf unendlich kleine Größen gewisser Ordnung ankommt, wie die Kurve selbst verhält. Solche Näherungskurven erhält man nun immer, wenn wie in unserem Falle eine Koordinatenseite selbst Tangente ist. Denn, um mit der Ecke *II* zu beginnen, so ist ja die Verbindungslinie der Punkte $y^2 z$ und xy^2 nicht da, die in gewissem Sinn schon eine Näherungskurve wäre, und wir sind leicht versucht, diese Linie um den vorhandenen Punkt $y^2 z$ zu drehen, bis sie durch einen anderen Punkt, der vorhanden ist, hier $x^2 y$ geht. Und in der Tat ist die algebraische Summe dieser beiden Glieder $x^2 + y = 0$, wo nachträglich wieder y eingesetzt und $z = 1$ gesetzt wurde, um die Kurve auf die Ecke *III* beziehen zu können, eine Parabel (*2*), die der oben gefundenen (*1*) kongruent ist. Sie berührt freilich nur dreipunktig, gibt aber doch schon eine weit bessere Näherung wie die unendlich ferne Gerade als zweipunktig berührende Tangente in der Richtung $x = 0$. Bestimmt man die drei Schnittpunkte, welche diese Parabel noch außerdem mit unserer Kurve hat, d. h. bringt man die Kurvengleichung auf die Form

$$y(yz + x^2) - xz(2y + z) = 0\,,$$

so ersieht man, daß zwei derselben auf der Geraden $y = -\frac{1}{2}$ liegen, die man einzeichnet, während der dritte in den Anfangspunkt fällt. Es ist von Vorteil, sich bei der Näherungskurve die Teile, in denen sie sich der gesuchten Kurve wirklich nähert, stärker auszuziehen. Dies haben wir bei der eben gefundenen Parabel (*2*) getan. Im folgenden haben wir es unterlassen, um den Eindruck der fertigen Figur nicht zu stören.

In derselben Weise erhält man nun für die Ecke *III* die Näherungskurve $y^2 - x = 0$. Die Kurve verhält sich also in dieser Ecke projektivisch genau so, wie in der vorigen. Man zeichnet diese ebenfalls dreipunktig berührende Parabel (*3*) und bringt die Kurvengleichung auf die Form

$$(y^2 - xz)z + xy(x - 2z) = 0\,,$$

woraus man wieder die Linie $x = 2$ entnimmt, auf der die zwei weiteren endlichen Schnittpunkte mit der Parabel liegen.

Als dritte Näherungskurve für die Ecke *I* ergibt sich die Hyperbel (*4*) mit der Gleichung $xy - 1 = 0$. Die Büschelform der Kurvengleichung lautet hier

$$x(xy - z^2) + yz(y - 2x) = 0\,.$$

Die zwei endlichen Schnittpunkte dieser Näherungshyperbel mit der Kurve liegen also auf $y = 2x$. Die Kurve verhält sich demnach in allen drei Ecken projektivisch gleichmäßig.

Hat man diese drei Näherungskurven mit allen Schnittpunkten eingezeichnet, deren Koordinaten auch ohne Mühe gerechnet werden können, so ist gar kein Zweifel mehr möglich, daß die Kurve, wie gezeichnet, verläuft. Wir erkennen in ihr eine einfache Serpentine, bei welcher das eine zwischen zwei Wendepunkten liegende Stück sich so weit ausbuchtet, daß es von der unendlich fernen Geraden (wie eine Parabel) berührt wird.

§ 26. Allgemeine Behandlung der Näherungskurven.

56. Die Art, wie wir in dem eben behandelten Beispiele zu den Näherungskurven gelangten, mochte plausibel erscheinen, war aber eigentlich nicht begründet. Ganz können wir dem Verfahren auch seine Willkür nicht nehmen, wollten wir nicht den independenten Beweis erbringen, daß für jede rationale Funktion $f(x, y) = 0$ y sich als Funktion von x durch eine Reihe darstellen läßt:

$$(5) \qquad y = A x^{\mu} + B x^{\mu+\mu_1} + C x^{\mu+\mu_1+\mu_2} + \ldots,$$ [51])

wobei die μ_i ganze oder gebrochene Zahlen sein können. Setzen wir die Möglichkeit der Entwicklung (5) aber voraus — eine Probe für die Richtigkeit gibt ja der Erfolg — so können wir unser geometrisches Verfahren unschwer rechtfertigen. Die Entwicklung gilt zunächst für die Ecke *III*, kann aber selbstverständlich für z und x, oder z und y ebenso gemacht werden, wenn wir nur immer die dritte Variable $= 1$ setzen. Man wird auch am besten die Kurve zuerst so transformieren, daß (in *III*) eine der Achsen Tangente ist, denn sonst lautet das erste Glied der Entwicklung $y = Ax$ (Tangente) und man müßte ein zweites

---

[51]) Diese Reihenentwicklungen hat erst V. Puiseux auf eine funktionentheoretische Grundlage gestellt in der berühmten Abhandlung „*Recherches sur les fonctions algébriques*", Journ. de Math. p. et appl. **15**, 1850, S. 365—480 und **16**, 1851, S. 228—240, übersetzt von Fischer, Halle 1861.

Glied bestimmen, um eine nicht-lineare Näherungskurve zu erhalten, was mühsam und viel weniger übersichtlich ist. Sonst aber gibt schon das erste Glied $y = A x^\mu$ eine recht brauchbare Näherung.

Wir setzen also in der Gleichung $f = 0$ der Kurve $y = A x^\mu$, dann wird aus einem Glied $x^r y^s$

$$A x^r x^{\mu s} = A x^{r + \mu s}.$$

So erhalten wir eine Gleichung in x für die Abszissen aller Schnittpunkte der Kurve $y = A x^\mu$ mit der gegebenen. Es ist uns aber nur um Schnittpunkte in der Nähe des Anfangspunktes zu tun. Daher werden wir nur diejenigen Glieder in Betracht ziehen, für welche $r + \mu s = \gamma$, wo γ der kleinste unter den möglichen Werten ist, da für sehr kleine x eben die höheren Potenzen unberücksichtigt bleiben dürfen. Welche Glieder dies sein werden, das ergibt unsere geometrische Darstellung aber sofort. Denn da wir r und s als Koordinaten aufgetragen haben, so ist $r + \mu s = \gamma$ die Gleichung einer Geraden: d. h. *alle Glieder von bestimmter Ordnung des Unendlichkleinwerdens liegen auf einer Geraden.* Die Konstante γ ist aber dem Abstande der Geraden vom Anfangspunkt proportional. Wir haben demnach als Näherungskurve das Aggregat derjenigen Glieder zu nehmen, die geraden Linien angehören, welche dem Anfangspunkt zunächst liegen, genauer ausgedrückt, so daß durch keinen vorhandenen Punkt eine Parallele möglich ist, die dem Anfangspunkt näher läge. Somit hat man die Regel:

> *Ist die Gleichung einer Kurve auf das analytische Dreieck gelegt, so geben die Seiten des analytischen Polygons die Näherungskurven für die Ecken des Koordinatendreiecks, durch welche die Kurve geht.*

57. Freilich die Näherungskurven selbst muß man ihrer Form nach sich angeeignet haben. Man kann dieselben im allgemeinen als höhere Parabeln (oder für $\mu < 0$ Hyperbeln) bezeichnen. So hat man, wenn die x-Achse Tangente ist, die zwei möglichen Formen 3. Ordg. $y = x^3$ (kubische Parabel) und $y = x^{3/2}$ (semikubische oder NEILsche Parabel). Diese Kurven lauten homogen

(a) $\quad y z^2 = \theta x^3 \qquad$ (b) $\quad y^2 z = \theta x^3$

(s. Fig. 15) und sind also projektivisch identisch. Dazu kommt noch die hyperbolische Form

$$\text{(c)} \qquad y^2 x = \theta z^3 .$$

All diese sind nur verschiedene Projektionsformen der allgemeinen C_3^3 von Nr. 25 Beisp. 2:

$$x_2^2 x_3 - \theta x_1^3 = 0 .$$

Die beiden ersten Formen sind zugleich charakteristisch für die Gestalt einer Kurve, die die unendlich ferne Gerade (a) als Tangente einer Spitze, (b) als Wendetangente besitzt. Die Form (c) ist schon aus der Figur verständlich.

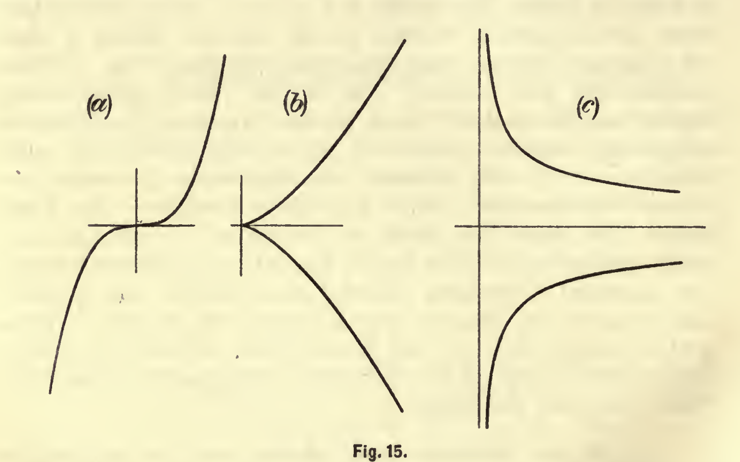


Fig. 15.

Überhaupt wissen wir nunmehr erst bestimmt, wie jede Kurve in einem Wendepunkt, in einer Spitze usw. aussieht, wenn wir dies nicht aus der Differentialrechnung als bekannt voraussetzen wollen. Denn für jede solche Singularität ist eine bestimmte Näherungskurve charakteristisch.

Wir betrachten auch noch die drei möglichen »binomischen Kurven« 4. Ordg. (Fig. 16):

$$\text{(a)} \quad y^3 z = \theta x^4 \qquad \text{(b)} \quad y z^3 = \theta x^4 \qquad \text{(c)} \quad y^3 x = \theta z^4 .$$

[Die Form $y^2 z^2 = \theta x^4$ zerfiele in die beiden Parabeln $y z = \pm \theta^{1/2} x^2$; sämtliche Kurven dieser und der vorigen Figur sind für $\theta = 1$ gerechnet]. Wiederum sind alle drei Formen

nur Projektionen ein und derselben Grundform. Für (a) ist der Anfangspunkt ein dreifacher Punkt mit drei koinzidierenden Tangenten ($y^3 = 0$), wegen seiner Gestalt »Spitzpunkt« genannt. Für (b) ist der Anfangspunkt ein gewöhnlicher Punkt, in dem aber $y = 0$ vierpunktig berührt: »Flachpunkt« heißt diese Liniensingularität. Bei (a) ist $x = 0$, $z = 0$ Flachpunkt, bei (b) $x = 0$, $z = 0$ Spitzpunkt, immer mit $z = 0$ als Tangente. Man sieht, daß beim unendlich fernen Flachpunkt die beiden Äste viel stärker divergieren wie beim unendlich fernen Spitzpunkt, während eine gewöhnliche Parabel zwischen beiden Formen in der Mitte stünde.

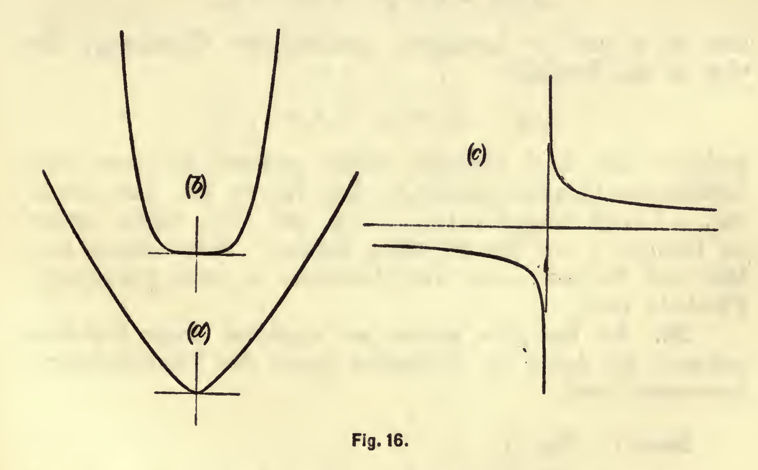


Fig. 16.

Auch der Fall (c) zeigt sehr deutlich den Unterschied zwischen Spitz- und Flachpunkt in der Art der Annäherung an die Asymptoten. Projizierte man irgend eine der drei Kurven ins Endliche, so würde sie zu einem Oval, das an einer Stelle sehr spitz, an einer andern sehr flach wäre (Fig. 22).

§ 27. Zusammengesetzte Näherungskurven. Beispiele.

58. Mit diesen binomischen Parabeln und Hyperbeln als notwendigstem Rüstzeug versehen, können wir darangehen, gegebene Gleichungen zu analysieren, oder wie man

sagt »Kurven zu diskutieren«[52]). Bevor wir Beispiele geben, müssen wir aber doch noch eine Frage beantworten, die sich dem Leser sicher schon aufgedrängt hat, die Frage nämlich, welcher Art denn die Näherungskurve wird, wenn auf einer Seite des analytischen Polygons drei oder mehr Punkte liegen. Für drei Punkte erhält man offenbar eine Gleichung von der Gestalt

$$A x^r y^s + B x^{r+\sigma} y^{s-\tau} + C x^{r+2\sigma} y^{s-2\tau} = 0 .$$

Spalten wir hier die Faktoren $x^r y^{s-2\tau}$ ab, so ergibt sich

$$A y^{2\tau} + B x^\sigma y^\tau + C x^{2\sigma} = 0 ,$$

eine in y^τ und x^σ homogene quadratische Gleichung, die sich in das Produkt

$$A (y^\tau - \Lambda_1 x^\sigma)(y^\tau - \Lambda_2 x^\sigma) = 0$$

zerlegen läßt und demnach nichts anderes als zwei sich berührende Parabeln darstellt. Die Kurve hat dann einen sog. »Berührungsknoten«, wie wir dies weiter unten an Beispiel 1 von Nr. 60 sehen werden. Ganz ebenso zerfällt ein Polynom von vier Gliedern in drei binomische Parabeln usw.

59. Als Beispiele wollen wir zunächst einige Kubiken nehmen, die durch ihr Verhalten gegen das Unendlichferne interessant sind.

Beisp. 1. (Fig. 17.)

$$x^2 y + 2 x^2 + x y + x - 2 y - 1 = 0 .$$

Für $z = 0$, das man sich in die Gleichung hineindenken mag, ergibt sich $x^2 y = 0$. Daraus darf man nach dem vorausgegangenen Beispiel nicht voreilig schließen, daß die unendlich ferne Gerade berührt. Es kann dies auch eine uneigentliche Berührung, d. h. ein Doppelpunkt sein. Dies ist hier der Fall, denn y kommt in der Gleichung nur linear vor; wir können dieselbe schreiben

$$y (x^2 + x z - 2 z^2) + (2 x^2 + x z - z^2) z = 0 ,$$

[52]) Weitere Einzelheiten zur Kurvendiskussion findet der Leser bei Cramer, De Gua, Reuschle (L. V.) sowie bei Johnson, *Curve tracing*, London 1886.

so daß der Doppelpunkt in $x=0$, $z=0$ mit dem Tangentenpaar $x^2+x-2\equiv(x-1)(x+2)=0$ sofort ersichtlich wird. Diese beiden Parallelen sind also Asymptoten an die Zweige des Doppelpunktes. Die dritte Asymptote muß die Gleichung $y-\lambda=0$ haben. Setzen wir $y=\lambda$ und stellen die Bedingung, daß auch die in x quadratischen Glieder aus der Gleichung verschwinden, so ergibt sich $\lambda+2=0$, also die Asymptote $y+2=0$. Der Leser überzeuge sich, daß das analytische Polygon diese drei Asymptoten, aber auch nichts weiter, viel rascher ergibt. Mehr ist

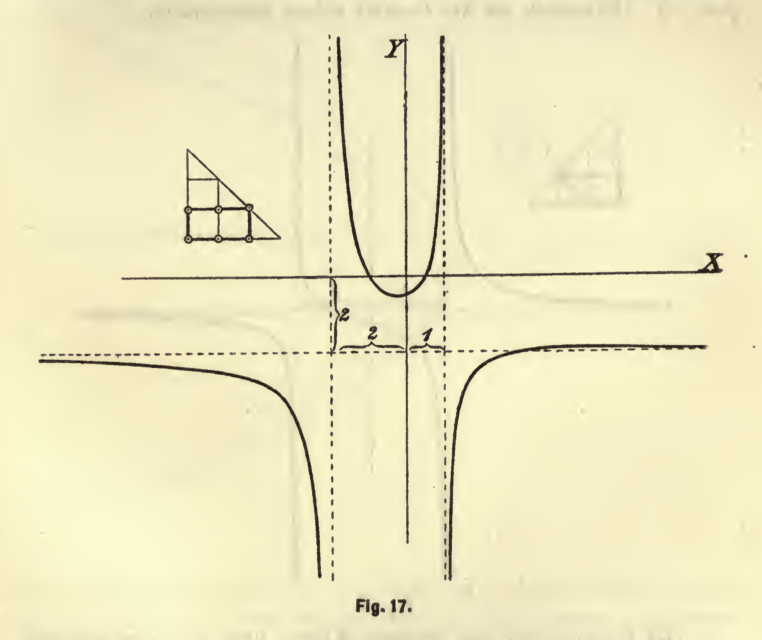


Fig. 17.

hier auch nicht nötig, wenn man nur etwa noch den dritten Schnittpunkt der letzten Asymptote ($x=3$, $y=-2$), die Schnittpunkte mit der x-Achse ($x=-1$; $x=\frac{1}{2}$) und den Schnittpunkt auf der y-Achse ($y=-\frac{1}{2}$) bestimmt, da man weiß, daß die Doppelpunktstangenten von einer Kubik nicht mehr überschritten werden können; denn sie haben ohnehin schon drei Punkte mit der Kurve gemein.

Hätte das lineare Glied in x den Koeffizienten 2, so wäre $y+2=0$ Wendeasymptote.

Beisp. 2. (Fig. 18.)

$$x^2 y - 4y + x - 1 = 0 .$$

Die Gleichung läßt sich schreiben

$$y(x^2 - 4z^2) + (x - z)z^2 = 0 .$$

Die Ecke $x = 0$, $z = 0$ ist wiederum Doppelpunkt mit den asymptotischen Tangenten $x \pm 2 = 0$, während $y = 0$ sofort als Asymptote erscheint. Das analytische Dreieck ergibt in diesem Falle die genauere Näherungshyperbel $xy + 1 = 0$, die wir nicht eingezeichnet haben. $y = 0$ gibt noch $x = 1$; $x = 0$ gibt noch $y = -\frac{1}{4}$. Hiernach ist die Gestalt schon festzustellen.

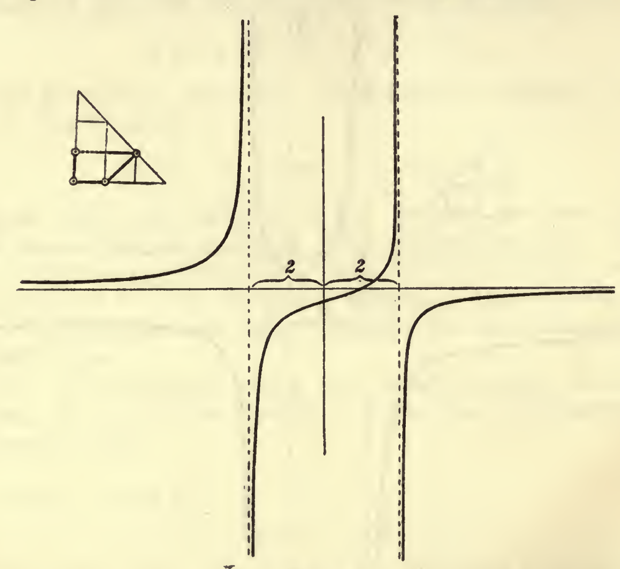


Fig. 18.

Der Unterschied der vorigen Kurve und der vorliegenden ist wesentlich der, daß bei der vorigen der dritte unendlich ferne Punkt auf dem unendlichen Zweig der Kurve lag, während er bei dem eben behandelten Beispiel auf der Schleife liegt.

Beisp. 3. Gestaltlich besonders merkwürdig ist die Kurve der Fig. 19 mit der Gleichung

$$2\sqrt{2}\,a\,x\,y + y^3 + a\,y^2 + a^2 y + a^3 = 0 .$$[53]

---

[53]) Die Koeffizienten rühren von einer Konstruktion her, die sich bei A. Haas, „*Beiträge zur graphischen Darstellung der ebenen Kurven 3. Ordnung*“, Progr. Stuttgart 1895, findet.

Aus dem analytischen Dreieck erkennt man $y=0$, $z=0$ als Doppelpunkt mit den beiden Tangenten $y=0$ und $z=0$ selbst und den beiden Näherungskurven $2\sqrt{2}\,x\,y+a^2=0$ und $y^2+2\sqrt{2}\,a\,x=0$, von denen nur die letztere (Parabel *1*) gezeichnet ist. Beide Näherungskurven werden von der C_3 noch in zwei endlichen Punkten geschnitten, die aber auf dem imaginären Geradenpaar $y^2+a\,y+a^2=0$ liegen. Da man zudem für

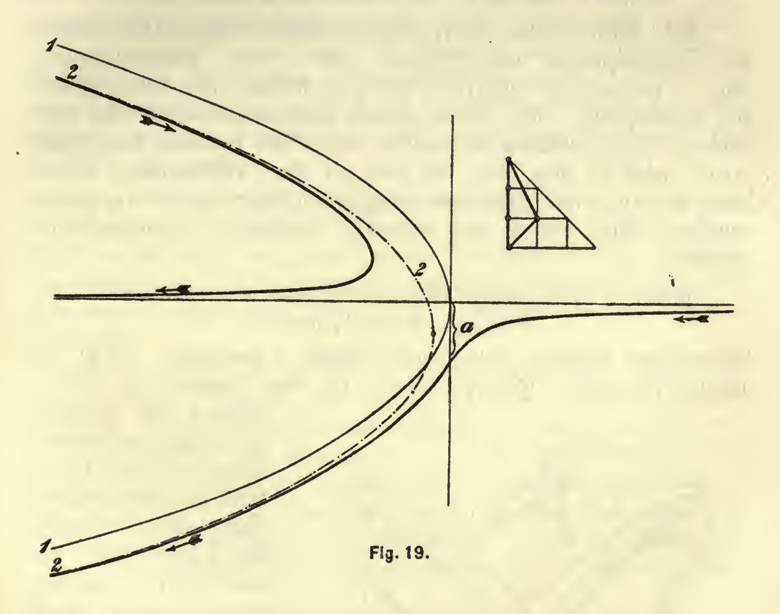


Fig. 19.

die Schnittpunkte auf der y-Achse den einzigen reellen Wert $y=-a$ erhält, so kann die Gestalt der Kurve gleich angegeben werden. Durch Pfeile ist in der Figur gezeigt, in welchem Sinn man die Kurve durchlaufen muß, um eine richtige Vorstellung von ihr zu bekommen.

Die asymptotische Parabel (*1*) berührt dreipunktig. Nimmt man das Glied $a\,y^2$ noch zur Parabel, so erhält man eine vierpunktig berührende und wenn man $a^2 y$ auch noch hineinzieht, eine fünfpunktig berührende Parabel (*2*). Man kann dann die Kurvengleichung schreiben

$$y\left\{\left(y+\frac{a}{2}\right)^2+2\,a\sqrt{2}\left(x+\tfrac{3}{16}\,a\sqrt{2}\right)\right\}+a^3=0\,.$$

Der sechste Schnittpunkt der Parabel *2*, deren Gleichung man durch Nullsetzen der geschweiften Klammer erhält, liegt auch im Doppelpunkt, gehört aber dem anderen Zweig an.

Die Kurve wurde von NEWTON wegen ihrer einem Dreizack ähnlichen Gestalt »Tridens« genannt.

§ 28. Beispiele für höhere Singularitäten.

60. Eine Kubik kann keine andere Singularität haben als Doppelpunkt oder Spitze. Auf neue Erscheinungen (sog. »höhere Singularitäten«) stoßen wir aber gleich bei Quartiken. Wie diese durch Zusammenziehen aus einfachen Singularitäten entstehen, lehrt der nächste Abschnitt. Auch wird in den Nrn. 80 und 85 eine vollständige Übersicht über alle bei Quartiken möglichen Singularitäten gegeben werden. Hier sollen nur einzelne Beispiele herausgegriffen werden.

Beisp. 1. Wir betrachten zunächst das Kurvenbüschel

$$x^4 + y^4 - 4x^2 y + \lambda y^2 = 0.$$

Keine der Kurven geht reell durchs Unendliche. Wir erhalten für $x = 0$ $y^2(y^2 + \lambda) = 0$. In den Punkten $y = \pm\sqrt{-\lambda}$ müssen der Symmetrie wegen horizontale Tangenten sein. Daher wird ein wesentlicher Unterschied zwischen den Kurven für $\lambda > 0$ und $\lambda < 0$ zu machen sein, zwischen denen $\lambda = 0$ den Übergang vermittelt. Die Fig. 20 gibt von jeder Art ein Beispiel. Für $y = 0$ erhält man $x^4 = 0$. Der Punkt kann aber kein Flachpunkt sein,

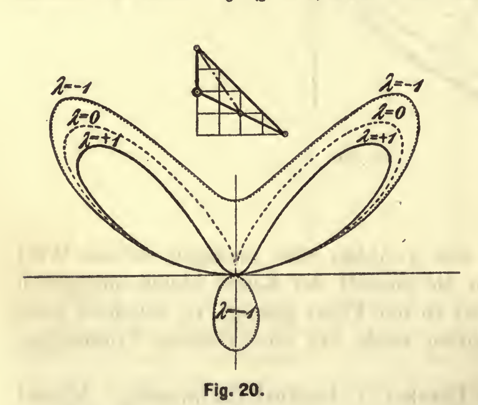


Fig. 20.

weil auch $x = 0$ $y^2 = 0$ ergab. Wir erhalten als Näherung das Aggregat der drei Glieder

$$\lambda y^2 - 4x^2 y + x^4 = 0,$$

welches in die zwei Parabeln

$$\lambda y = x^2 (2 \pm \sqrt{4 - \lambda})$$

zerfällt. Diese werden von der Kurve nicht mehr überschritten. Da die beiden Parabeln sich berühren, so müssen im Anfangspunkt zwei Zweige der Kurve sich ebenfalls berühren. Wir haben also hier den Fall eines Berührungsknotens. Aus den beiden Parabeln ersehen wir auch gleich den Unterschied der Kurven für positives und negatives λ. Denn für $\lambda < 0$ wird $\sqrt{4-\lambda} > 2$, also ist die eine Parabel aufwärts, die andere abwärts gerichtet, die Selbstberührung erfolgt von außen. (Beisp. $\lambda = -1$). Für $4 > \lambda > 0$ sind beide Parabeln nach oben gerichtet, die Berührung erfolgt also von innen (Beisp. $\lambda = +1$). Für $\lambda = 4$ ist nur noch der Anfangspunkt ein reeller Punkt der Kurve, die in zwei imaginäre Kegelschnitte mit vierpunktiger Berührung im Anfangspunkt zerfällt:

$$(x^2 + i\,y^2 - 2\,y)\,(x^2 - i\,y^2 - 2\,y) = 0\,.$$

Für $\lambda > 4$ ist die Kurve ganz imaginär, bis sie für $\lambda = \pm\infty$ in die doppeltzählende x-Achse übergeht, aus der sich dann für negative sehr große λ wieder die Formen mit Selbstberührung von außen entwickeln.

Es ist nur noch der Fall $\lambda = 0$ zu betrachten. Hier fällt im analytischen Polygon das doppelt geringelte Glied weg und es ist die strichpunktierte Umfangslinie zu benutzen. Wir erhalten wie vorhin eine Parabel $x^2 - 4\,y = 0$ als Näherungskurve für den Zweig, der die x-Achse berührt, aber die Neilsche Parabel $y^3 - 4\,x^2 = 0$ für den anderen Zweig, der also mit einer Spitze senkrecht an den ersten herantritt. In der Tat hat ja die Kurve im Anfangspunkt einen dreifachen Punkt mit den Tangenten $x^2\,y = 0$.

Bestimmen wir etwa noch die horizontalen Tangenten (nach Nr. 14, Bem. 1), so wird die Kurve durch die beiden Parabeln und die horizontalen Tangenten derart eingegrenzt sein, daß wir ihre Gestalt für jedes λ unzweifelhaft anzugeben imstande sind. Setzen wir also

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv 4\,x^3 - 8\,x\,y \equiv 4\,x\,(x^2 - 2\,y) = 0\,,$$

so haben wir außer $x = 0$, was wir schon wissen, noch die Punkte, die auf der Parabel $x^2 = 2\,y$ liegen. Setzt man dies in die Gleichung, so ergibt sich $y = \sqrt{4-\lambda}$, und zwar für reelle Berührung, die uns hier besonders interessiert, nur positiv, da sonst $x = \sqrt{2\,y}$ für die Berührungspunkte imaginär würde. Die

Gerade $y = +\sqrt{4-\lambda}$ ist eine eigentliche Doppeltangente der Kurve; die Gerade $y = -\sqrt{4-\lambda}$ eine isolierte Doppeltangente.

Die Zeichnung der Näherungskurven in den einzelnen Fällen müssen wir dem Leser überlassen.

Beisp. 2.

$$x^4 - 6x^2y - 8x^2 + y^2 = 0 .$$

Die in x symmetrische Kurve (Fig. 21) hat zunächst im Anfangspunkt einen Doppelpunkt mit den beiden Tangenten (*1*): $y \pm 2x\sqrt{2} = 0$, schneidet die y-Achse weiter nicht im Endlichen und die x-Achse in den beiden Punkten $x = \pm 2\sqrt{2}$. Für die Ecke $x = 0$, $z = 0$ ergibt sich die Näherung

$$y^2 - 6x^2y + x^4 = 0 .$$

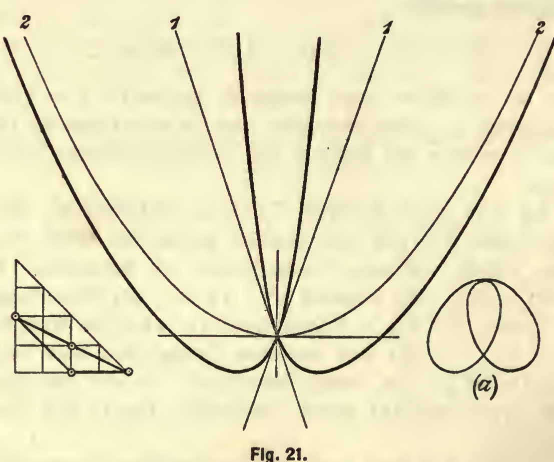


Fig. 21.

Diese Gleichung zerfällt in die beiden asymptotischen Parabeln

$$y = (3 \pm 2\sqrt{2})x^2 \quad \text{oder} \quad x^2 = (3 \mp 2\sqrt{2})y ,$$

die man leicht zeichnen kann. Wir haben in der Figur nur die breitere Parabel (*2*) verzeichnet, weil sich die schmälere gar zu eng an die beiden mittleren Zweige der Kurve anschließt. Beide Parabeln schneiden die Kurve nicht mehr im Endlichen. Es liegt also ein Berührungsknoten im unendlich fernen Punkt der y-Achse mit $z = 0$ als Tangente vor. Als horizontale eigentliche Doppeltangente findet man $y + 1 = 0$, als isolierte Doppeltangente $y + 2 = 0$. Ins Endliche projiziert hat die Kurve die schematisch nebengezeichnete Gestalt (*a*). Der Leser versäume nicht, sich

vorzustellen, wie aus dieser Kurve (a) durch Auflösen des Knotens ähnliche Kurven hervorgehen wie im vorigen Beispiel, oder durch Zusammenziehen des Knotens die Zwischenform der vorigen Nummer.

Beisp. 3.

$$y^3 = x^4 + y^4 .$$

Dies ist eine im Endlichen geschlossene, einfach symmetrische Kurve mit Spitzpunkt im Anfangspunkt. Als Näherungskurve nach dem analytischen Dreieck ergibt sich $y^3 = x^4$. Für $x = 0$ wird $y = 1$, für $y = 1$ $x^4 = 0$; dort ist also wohl ein Flachpunkt. Zur genauen Feststellung verlegen wir den Anfangspunkt in diesen Punkt, indem wir setzen:

$$y = \eta + 1 \qquad x = \xi .$$

Dann wird die Gleichung

$$\xi^4 + \eta^4 + 3\,\eta^3 + 3\,\eta^2 + \eta = 0 .$$

In der Tat gibt ein neues analytisches Dreieck die Näherungsparabel $\eta + \xi^4 = 0$. Die Kurve (Fig. 22) ist demnach die endliche Form der biquadratischen Parabeln von Nr. 57. Bez. der Auflösung beider Singularitäten vgl. Nr. 71, Beisp. 4.

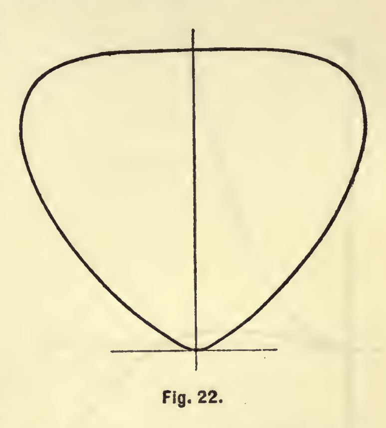


Fig. 22.

61. Bei höheren Singularitäten kommt es jedoch öfter vor, daß das erste Glied der Entwicklung nicht genügt. Dies tritt z. B. ein, wenn in den oben behandelten Fällen des Selbstberührungspunktes beide Näherungsparabeln identisch werden. Wir nehmen etwa das Beispiel

$$f \equiv x^4 + x y^3 + y^4 - 2\,x^2 y z - x y^2 z - 2\,y^3 z + y^2 z^2 = 0 .$$

Hier erhält man nach dem analytischen Dreieck (Fig. 24) als Näherungskurve für den Ursprung:

$$y^2 - 2\,x^2 y + x^4 \equiv (y - x^2)^2 = 0 .$$

Zwei Zweige berühren sich also mit der x-Achse als Tangente so innig, daß das erste Glied der Entwicklung für beide Zweige übereinstimmt. Um sie zu trennen, setzen wir in die Gleichung $y = x^2 + u$ und suchen dann die Näherungs-

kurve für u und x. Man erhält nach einiger Rechnung, die wir dem Leser überlassen müssen, $u^2 - x^5 = 0$, oder also $u = \pm x^{\frac{5}{2}}$, so daß die Entwicklung in den ersten zwei Gliedern lautet:

$$y = x^2 \pm x^{\frac{5}{2}}.$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Kurve 5. Ordg., deren Gleichung rational

$$(y - x^2)^2 = x^5$$

lautet, zeichnet man sich am besten ein für allemal (Fig. 23). Der Anfangspunkt hat den Charakter einer sog. Spitze zweiter Art oder »Schnabelspitze«. Die Zweige, die sich der Parabel $y - x^2 = 0$ nähern, können sich wegen des zweiten Gliedes, das für $x < 0$ imaginär wird, nach links nicht reell fortsetzen. Über die Entstehung der Schnabelspitze aus den uns bekannten einfachen Singularitäten werden wir bald Näheres erfahren. Zunächst sieht man aber schon aus der Gestalt, daß sie eine Wendung absorbiert haben muß, da man vom oberen Kurvenzweig kommend die konvexe Seite zur Linken, nach dem Überschreiten der Spitze aber zur Rechten hat.

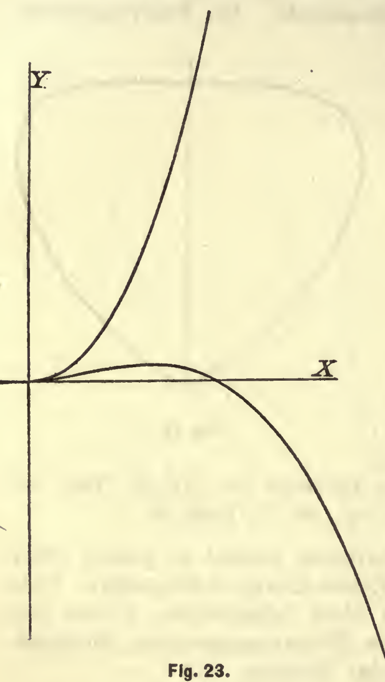


Fig. 23.

Unsere Kurve f hat auch noch einen Knoten auf der y-Achse. Man erhält für $x = 0$ außer $y^2 = 0$ noch $(y - 1)^2 = 0$ und für $y = 1$ $x^2(x^2 - 2) = 0$. Demnach ist der Punkt $x = 0$, $y = 1$ ein Doppelpunkt. Zur ganz sicheren Feststellung kann man die drei partiellen Differentialquotienten bilden, oder den Anfangspunkt hineinverlegen; auch die Gleichung des Tangentenpaares aufzustellen wäre nützlich,

was wir alles dem Leser überlassen. Wir müssen noch die unendlich fernen Punkte betrachten. Für $z = 0$ ergibt sich

$$x^4 + x y^3 + y^4 = 0\,.$$

Eine Gleichung vierten Grades $x^4 + a x^2 + b x + c = 0$ hat die Diskriminante

$$27\,\Delta \equiv 4(a^2 + 12\,c)^3 - (2\,a^3 - 72\,a\,c + 27\,b^2)^2\,.$$

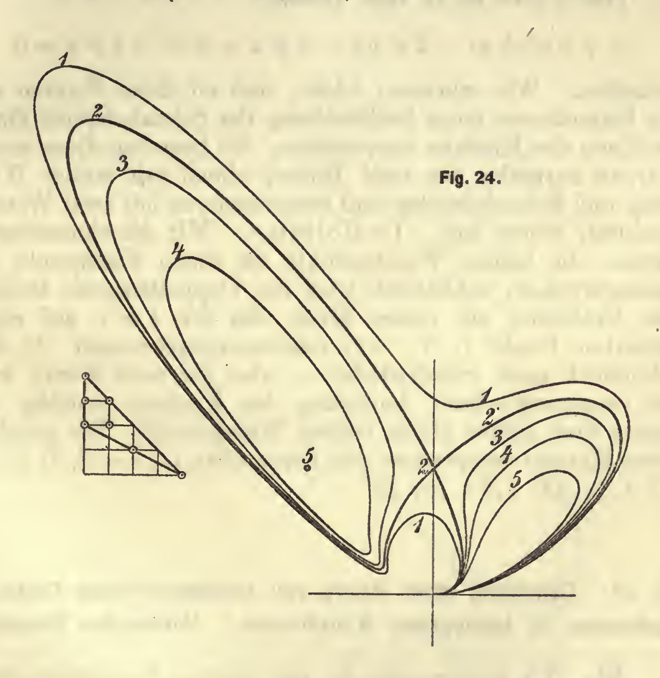


Fig. 24.

Ist diese < 0 so hat die Gleichung zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln (s. etwa Weber, *Algebra*, Bd. I, S. 277); ist sie > 0, so kann sie entweder vier reelle oder vier imaginäre Wurzeln haben. Für den ersten Fall muß aber $a < 0$, und $a^2 - 4\,c > 0$ sein. Bei uns ist jedoch einerseits $\Delta > 0$, andererseits aber $a = 0$, wonach auch der Fall von vier reellen Wurzeln ausgeschlossen ist. Die Kurve geht also nicht reell durchs Unendliche.

Aus dem Anfangspunkt geht noch eine eigentliche Tangente an die Kurve, die man statt durch $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ leichter erhält, wenn man $y = \lambda x$ setzt und die Diskriminante der dann entstehenden Gleichung in x gleich Null setzt. Es ergibt sich ohne Mühe $y = -\frac{4}{9}x$. So bekommt man schon mit einiger Wahrscheinlichkeit die Kurve *2* der Figur 24.

Die Kurve ist in dem Büschel

$$x^4 + xy^3 + y^4 - 2x^2yz - xy^2z + y^2z^2 - \lambda y^3 z = 0$$

enthalten. Wir erkennen leicht, daß all diese Kurven aus der betrachteten unter Beibehaltung der Schnabelspitze durch Auflösen des Knotens hervorgehen. So bestehen diese neuen Kurven entweder aus zwei Teilen, einem mit reeller Wendung und Schnabelspitze und einem anderen mit zwei Wendepunkten, einem sog. »Unifolium«. Mit abnehmendem λ werden die beiden Wendepunkte zu einem Flachpunkt zusammenrücken, schließlich wird die Doppeltangente isoliert, das Unifolium ein reines Oval, das für $\lambda = 1$ auf einen isolierten Punkt $(-1, +1)$ zusammengeschrumpft (*5*) und schließlich ganz verschwindet — oder die neue Kurve wird bei entgegengesetzter Auflösung des Knotens einteilig mit zuerst drei, später einem reellen Wendepunkt. Die gezeichneten Kurven entsprechen den Parametern (*1*) $\lambda = 2{,}2$; (*2*) 2; (*3*) 1,8; (*4*) 1,5; (*5*) 1.

§ 29. Gleichung einer Kurve von vorgeschriebener Gestalt. Diskussion in homogenen Koordinaten. Vermischte Beispiele.

62. Wir können nun die gewonnenen Kenntnisse auch verwerten, wie dies schon in Nr. 1 angedeutet wurde, um eine Kurve von gegebener Gestalt annähernd durch eine Gleichung wiederzugeben. Der Leser kann sich ja alle voraufgegangenen Beispiele umkehren. Wir wollen zu dem Gegenstand nur ein, wie wir hoffen, interessantes Beispiel geben. Als vorgezeichnete Gestalt wählen wir die Herzform [Fig. 25 (a)]. Die Kurve hat dann zwei Spitzen mit einer gemeinschaftlichen Tangente, muß also mindestens 6. Ordg. sein. Das Koordinatendreieck nehmen

wir so, daß zwei seiner Ecken *III* und *II* je in eine Spitze fallen. Auch wollen wir die Kurve symmetrisch annehmen. Wir müssen dann für die Ecke *III* als Näherungskurve eine nach unten gehende NEILsche Parabel, etwa $x^2 + y^3 = 0$ erhalten. Durch Homogenisierung und Multiplikation mit z^3 bringen wir die Glieder auf die sechste Dimension und merken uns die Punkte $x^2 z^4$ und $y^3 z^3$ im analytischen

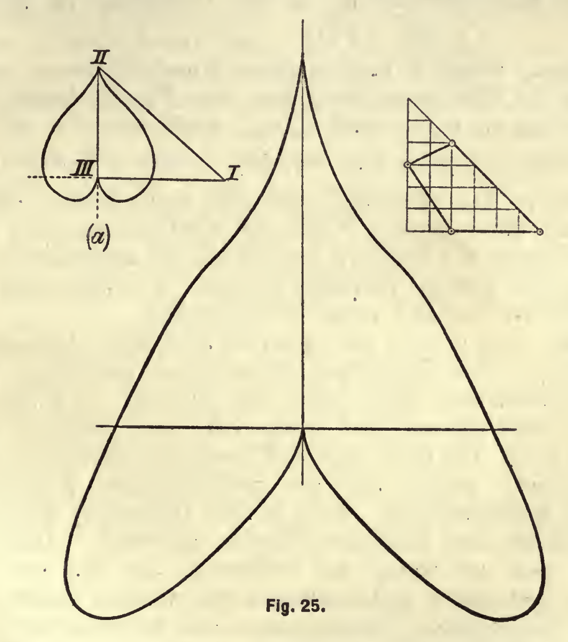


Fig. 25.

Dreieck an. In der Ecke *II* muß die Näherungskurve etwa lauten $x^2 - z^3 = 0$ oder mit y^3 erweitert $x^2 y^4 - y^3 z^3 = 0$. Wir haben also nur noch den Punkt $x^2 y^4$ anzumerken. Nun sind aber noch zwei Bedingungen zu erfüllen: 1) daß die Linie $y = 0$ in nur zwei reellen symmetrisch gelegenen Punkten im Endlichen schneide, 2) daß die unendlich fernen Punkte imaginär seien. Beiden Bedingungen genügt die Hinzufügung eines Gliedes mit x^6 und es dürfte nun die Kurve

$$x^6 + x^2 y^4 - y^3 z^3 - x^2 z^4 = 0$$

schon die verlangte Gestalt haben. Zeichnen wir diese in

ein rechtwinkliges Koordinatensystem, wo also wieder $z = 0$ die unendlich ferne Gerade ist, so liegt die obere Spitze des Herzens allerdings im Unendlichen mit der y-Achse als asymptotischer Tangente. Wir brauchen aber nur eine Projektion (= Zentralkollineation) auszuführen, um die endliche Form zu erhalten. Diese haben wir so gewählt, daß der Abstand der beiden Spitzen $= 2$ wurde, alles andere aber beibehalten; in die Gleichung ist also nur

$$z = \vartheta(\eta - 2\zeta); \qquad [x = \xi;\ y = \eta]$$

zu setzen, wobei ϑ nach unserer Konstruktion $= -\frac{1}{2}$ ist, so daß die Gleichung der Kurve von Fig. 25 lautet, wenn wir wieder $x, y, z,$ statt ξ, η, ζ einführen:

$$16x^2(x^4 + y^4) + 2(y - 2)^3(2y^3 - x^2y + 2x^2) = 0\,.$$

Die Kurve hat allerdings zwei sehr flache Stellen erhalten, die man durch andere Wahl der Koeffizienten oder durch Hinzufügung von Gliedern innerhalb des analytischen Polygons gewiß schöner abrunden könnte. Wir laden den Leser freundlichst ein, sich daran zu versuchen.

63. Nun müßten wir eigentlich auch einige Diskussionen in Linien- und homogenen Koordinaten ausführen. Beide Koordinatenarten haben aber den Nachteil, daß man über das Unendlichferne gar nicht oder nur indirekt unterrichtet wird. Die PLÜCKERschen Linienkoordinaten besonders sind immer wieder auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem zurückzuführen. Eine direkte Diskussion würden nur SCHWERINGsche Linienkoordinaten gestatten. Doch sind diese noch zu wenig im Gebrauch, als daß wir ihnen eine eingehendere Behandlung zuteil werden lassen könnten. Wir müssen Interessenten auf SCHWERINGS schon zitiertes Büchelchen[15]) verweisen, wo mehrere Beispiele vollständig behandelt sind. — Was die homogenen (Punkt-) Koordinaten betrifft, so muß, wenn wir das wirkliche Bild und nicht nur die projektiven Eigenschaften der durch die Gleichung gegebenen Kurve haben wollen, etwas gegeben sein, damit man aus den »homogenen« die »wahren« Koordinaten ableiten könne. Dies wird gewöhnlich durch Angabe eines Punktes erreicht, für den alle Koordinaten $= 1$ sind. Diesen Punkt nennt man den »Einheitspunkt«. Man kann aber auch die Gleichung der unendlichfernen Geraden angeben und aus dieser rückwärts die Koordinaten definieren.

Darauf näher einzugehen, ist nicht unsere Sache. Dennoch wollen wir wenigstens ein Beispiel geben, das auch der im Gebrauch projektiver Koordinaten weniger geübte Leser verstehen wird.

Wir wollen die Gestalt der Kurve

$$x_2^4 - 2\,x_1\,x_2^2 x_3 - x_3^4 = 0$$

bestimmen, wenn $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ die Gleichung der unendlichfernen Geraden ist[53]. — Die unendlichferne Gerade ist hier »Einheitsgerade« (denn ihre Koordinaten sind 1, 1, 1), woraus man schließen kann [s. Doehlemann[5]) S. 35], daß der Einheitspunkt der Schwerpunkt des Koordinatendreiecks ist. Wir haben also sogenannte »Flächenkoordinaten«. Für die weitere Behandlung ist dies jedoch gleichgültig. Wir überlassen es dem Leser zu bestimmen, daß die Ecke $x_2 = 0$ $x_3 = 0$ ein dreifacher Punkt von der Art der Kurve für $\lambda = 0$ in Fig. 20 ist, mit $x_2 = 0$ als Tangente der Spitze und $x_3 = 0$ als Tangente des parabolischen Zweiges. Unser Interesse richtet sich hauptsächlich auf die Beziehung der Kurve zum Unendlichfernen.

Offenbar erhält man die vier unendlichfernen Punkte, wenn man aus der Gleichung der Kurve und der Gleichung der unendlichfernen Geraden eine Variable eliminiert. Statt dieser unsymmetrischen Rechnung ziehen wir es vor, die Kurve durch einen Parameter λ darzustellen. Sie ist ja — wegen des dreifachen Punktes — rational und wir brauchen nur $x_2 = \lambda\, x_3$ zu setzen, um die Darstellung zu erhalten:

$$x_1 : x_2 : x_3 = (\lambda^4 - 1) : 2\,\lambda^3 : 2\,\lambda^2\,.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, so erhält man für die Parameter der unendlichfernen Punkte

$$\lambda^4 + 2\,\lambda^3 + 2\,\lambda^2 - 1 \equiv (\lambda + 1)\,(\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1) = 0\,,$$

wobei der zweite Faktor, wegen $\Delta < 0$ (s. Nr. 15) nur eine reelle Wurzel hat $\lambda = \Lambda$ ($= 0{,}505$ ca.). Wir haben demnach zwei reelle unendlichferne Punkte P $(0, -1, 1)$ und P' $(-1-\Lambda, \Lambda, 1)$.

Nun ist die Gleichung der Tangente in einem Punkte mit den Koordinaten y_1, y_2, y_3:

$$x_1(-y_2^2 y_3) + x_2(2\,y_2^3 - 2\,y_1\,y_2\,y_3) + x_3(-y_1\,y_2^2 - 2\,y_3^3) = 0\,.$$

[53]) Cayley, Educ. Times **4**, 1865, S. 17.

Dies gibt für den Punkt P die Asymptote $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$. Für die Schnittpunkte derselben mit der Kurve hat man

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 4\lambda^2 - 1 \equiv (\lambda + 1)^2(\lambda^2 + 2\lambda - 1) = 0\,,$$

also abgesehen vom Berührungspunkt noch zwei reelle Schnittpunkte $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$. — Ebenso findet man für P' die Asymptote $\Lambda^2 x_1 - 2x_2 + (\Lambda + 1)x_3 = 0$ und für ihre Schnittpunkte mit der Kurve

$$\begin{aligned} &\Lambda^2(\lambda^4 - 1) - 4\Lambda\lambda^3 + (2\Lambda + 2)\lambda^2 \\ &\equiv (\lambda - \Lambda)^2[\Lambda^2\lambda^2 - 2(\Lambda^2 + \Lambda + 1)\lambda - 1] = 0\,, \end{aligned}$$

was wiederum zwei reelle Schnittpunkte ergibt. Der Leser kann noch mit Hilfe des auf Seite 111 gegebenen Kriteriums zeigen, daß jede Gerade

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$$

die Kurve in mindestens zwei reellen Punkten schneidet, daß dieselbe also nicht ins Endliche projiziert werden kann und mag sich die Kurve nun schon vorstellen. Aus der in Fig. 33 abgebildeten Quartik mit drei Knoten geht sie hervor, wenn man die Spitze so weit abwärts zieht, daß ein dreifacher Punkt entsteht.

Indem wir diesen Abschnitt schließen, möchten wir nur noch darauf hinweisen, daß der Leser die hier vorgeführten Hilfsmittel zur Kurvendiskussion viel sicherer und zielbewußter wird anwenden können, wenn er die gestaltlichen Verhältnisse der Kurven 3. und 4. Ordg. wird kennen gelernt haben. Auf jeden Fall läßt uns aber die Gleichung der Kurve viel tiefer sehen, als dies die Zeichnung je tun kann. Hierfür werden der Belege immer mehr werden und besonders der nächste Abschnitt gibt eine vorzügliche Illustration zu unserer Aufstellung.

Wir geben zunächst noch einige vermischte Beispiele.

Beisp. 1. Die sogenannte van der Waalssche Gleichung für stark komprimierte Gase lautet

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = c\,.$$

Hier ist p der Druck, v das Volumen, a und b sind der Gasmasse eigentümliche Konstanten [für Kohlensäure ist z. B. $a = 0{,}00874$; $b = 0{,}0023$], $c = 1 + \frac{t}{273}$, wo t die Temperatur bedeutet. Betrachten wir p als Ordinate, v als Abszisse, so stellt obige

Gleichung eine Quartik mit dreifachem Punkt in $v=0$, $z=0$ dar, der aus einer nach unten gerichteten Spitze [Näherungskurve $v^2 p + a = 0$] und einem einfachen Zweig mit der Asymptote $v = b$ zusammengesetzt ist. Wollen wir eine bessere Annäherung an diese Asymptote, so setzen wir $v = b + u$ in die Gleichung ein und erhalten vermittels des analytischen Dreiecks $u = c/p$, also $v = b + c/p$, oder

$$p(v - b) = c,$$

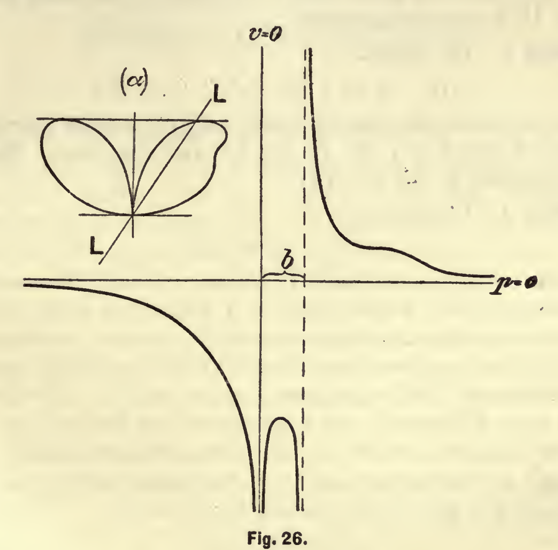


Fig. 26.

ein angenähertes Gesetz, das für sehr großen Druck gilt. Außerdem erkennt man $p = 0$ sofort als Asymptote, erhält aber durch das analytische Dreieck auch gleich die Näherungshyperbel

$$p v = c,$$

die das Boyle-Mariottesche Gesetz gibt, das ja für geringen Druck (oder für stark verdünnte Gase) gültig ist. Der Zweig im ersten Quadranten hat für nicht zu große Werte von t und bei den angegebenen Werten von a und b eine deutliche Einbuchtung.[54])

---

[54]) Der Physiker benutzt natürlich überhaupt nur diesen Zweig. Siehe die den Mathematiker wenig befriedigende Darstellung bei Nernst-Schönflies, „*Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften*", 4. Aufl., München (Oldenbourg) 1904, S. 35—37.

Die Kurve, die in Fig. 26 schematisch dargestellt ist, ist eine Projektion der Fig. 26 (α), wenn man die Gerade L zur unendlichfernen Geraden macht.

Beisp. 2. Die Quartik

$$4x^4 - 4x^3y + 5x^2y^2 + 2xy^3 + y^4 - 4y(2x^2 + xy + y^2) + 4y^2 = 0$$

hat eine Schnabelspitze im Anfang und eine Spitze in $x = 0$, $y = 2$. Konstruktion (und Figur) bei P. H. Schoute, Arch. Néerl. **20**, 1887, S. 41 des Sonderabdrucks.

Beisp. 3. Die Kubik

$$x(x^2 - 2y^2) + (x^2 - y^2)(1 + \tfrac{2}{3}y) = 0$$

hat einen Knoten im Anfangspunkt und drei reelle Asymptoten. Die Gestalt der Kurve ist in Fig. 54 wiedergegeben. Man sehe die Bemerkung in Nr. 130, IV.

Beisp. 4. Die Quartik

$$(x^2 - \alpha^2)y^2 = \beta$$

ist deswegen interessant, weil Plücker (s. dessen *„Gesammelte Abhandlungen“*, I. Bd., Leipzig 1895, S. 315 und die Note auf S. 607) die Möglichkeit einer eigentlichen Kurve 4. Ordg. mit unendlichfernem Knoten (mit zwei parallelen Wendeasymptoten) und einem unendlichfernen Berührungsknoten geleugnet hat. Der Leser vergleiche diese Kurve mit der Kreuzkurve von Nr. 26 Beisp.

Für negatives β wird der Berührungsknoten isoliert.

Beisp. 5. Um noch eine Kurve höherer Ordnung zu geben, betrachten wir die C_5 [Cesàro[91]) S. 585]:

$$x^5 + y^5 = \mu x^2 y^2 .$$

Dieselbe hat im Anfangspunkt einen vierfachen Punkt, der aus zwei Spitzen besteht und eine reelle Wendeasymptote. Symmetrie gegen $y = x$!

Weitere Beispiele sind im folgenden überall verstreut.

ABSCHNITT VII.

HÖHERE SINGULARITÄTEN.

§ 30.

Begriff der höheren Singularität. Vorbereitende Überlegungen.

64. Wir haben die PLÜCKERschen Formeln seinerzeit aufgestellt, indem wir die Kurve nur mit ›einfachen‹ (PLÜCKERschen) Singularitäten begabt dachten, die man auch ›notwendige Singularitäten‹ nennt, eben weil jede Kurve, oder ihre Reziproke, solche besitzen muß. Es war uns freilich nicht entgangen, daß mehrere Doppelpunkte in einen Punkt zusammenrücken können, um einen sogenannten k-fachen Punkt zu bilden; resp. wir fanden die Möglichkeit des k-fachen Punktes und zeigten, daß man diesen als $\frac{1}{2}k(k-1)$ Doppelpunkten gleichwertig betrachten könne. Der vorige Abschnitt hat uns nun aber gezeigt, daß es auch andere Vorkommnisse gibt — Berührungsknoten, Schnabelspitze usw. —, deren Einfluß in den PLÜCKERschen Formeln wir absolut nicht beurteilen können, da uns über ihre eventuelle Entstehung oder Zusammensetzung aus den gewöhnlichen Singularitäten bis jetzt nichts bekannt ist. Wir heißen solche Vorkommnisse, um sie zu den notwendigen Singularitäten in Gegensatz zu setzen, »höhere Singularitäten«. Mit ihnen müssen wir uns in diesem Abschnitt beschäftigen. Bevor wir aber in eine allgemeinere Betrachtung eintreten, versuchen wir aus den uns schon bekannten Beispielen einige Gesichtspunkte zu gewinnen.

Fassen wir zunächst den Berührungsknoten ins Auge! Die Kurve, die einen solchen im Anfangspunkte aufwies (Nr. 60, Beisp. 1), hatte die Gleichung

$$x^4 + y^4 - 4x^2y + \lambda y^2 = 0 \qquad (\lambda \neq 0).$$

Wir können nun die Klasse der Kurve direkt bestimmen,

indem wir etwa die horizontalen Tangenten abzählen. Dies gibt, wenn wir die Tangente des Anfangspunktes (als Tangente an zwei Zweige) und jede eigentliche Doppeltangente zweifach zählen, $\nu = 8$. Die Bestimmung der vertikalen Tangenten führt, der Symmetrie wegen, auf eine Gleichung in y vom vierten Grad, gibt also ebenfalls $\nu = 8$. Die Klasse 12 der allgemeinen Quartik wurde folglich durch den Berührungsknoten um vier erniedrigt. Das ist dem Einfluß von zwei Doppelpunkten äquivalent. In der Tat ist die Vorstellung leicht, etwa bei der Kurve mit dem Parameter $\lambda = +1$ (in Fig. 20), den von oben berührenden Zweig im Anfangspunkt etwas nach abwärts zu ziehen, so daß zwei Schnittpunkte entstehen wie in dem unteren Zweig der (schematischen) Fig. 27. Gleichzeitig treten dann aber zwei reelle Doppeltangenten auf, die beim Zusammenrücken der beiden Knoten beide in die Tangente des Berührungsknotens fallen. Es ist also nicht bloß der Anfangspunkt ein singulärer Punkt, sondern auch die x-Achse singuläre Tangente der Kurve, und der Berührungsknoten erweist sich als Singularität sowohl für Punkt- wie für Linienkoordinaten.

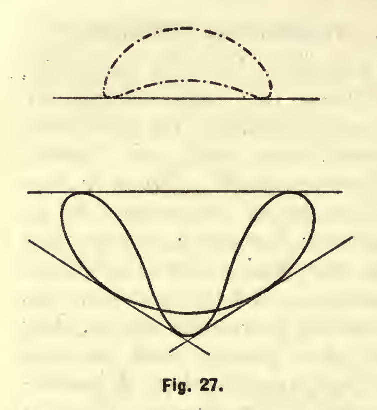


Fig. 27.

Wir können aber unsere Aufstellung leicht besser begründen, wenn wir die erste Polare eines hinreichend allgemeinen Punktes — etwa des Punktes $x = z = 0$ — bilden und den Schnitt mit der Kurve im Berührungsknoten untersuchen. Diese Polarkurve hat die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} \equiv 4y^3 + 2\lambda y - 4x^2 = 0,$$

und man erhält aus dem analytischen Dreieck die Näherung für den Anfangspunkt

$$2\lambda y = 4x^2 + \text{höhere Glieder};$$

für die Kurve selbst gilt aber

$$2\lambda y_1 = 4x^2 + 2x^2\sqrt{4-\lambda} + \text{höhere Glieder},$$

$$2\lambda y_2 = 4x^2 - 2x^2\sqrt{4-\lambda} + \text{höhere Glieder}.$$

Setzen wir $y - y_1$ und $y - y_2$ gleich Null, so tritt jedesmal x^2 als Faktor vor die Klammer; besser ausgedrückt, es ist

$$\lim_{x=0} \frac{y - y_1}{x^2} = \text{konst.},$$

das heißt aber nichts anderes als die erste Polare schneidet jeden der beiden Kurvenzweige in zwei im Anfangspunkt liegenden Punkten. Die Reduktion der Klasse muß also 4 betragen.

65. Was die Schnabelspitze betrifft, so fanden wir dieselbe an einer Kurve von der Gleichung (Nr. 61, S. 109)

$$f \equiv x^4 + xy^3 + y^4 - 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + y^2 = 0,$$

und die Kurve hatte außerdem noch einen gewöhnlichen Knoten. Auch hier läßt sich die Klasse direkt bestimmen. Zwar ist die Elimination zur Bestimmung der horizontalen oder vertikalen Tangenten nicht gerade einfach; aber wir mögen bedenken, daß sich von der Schnabelspitze selbst aus nur noch eine Tangente an die Kurve ziehen ließ, und da die Tangente jedes Kurvenpunktes schon für 2 zählt, müssen wir die Tangente der Schnabelspitze wenigstens für 4 zählen, da sie ja auch vierpunktig berührt. So ergibt sich $\nu = 5$ als Klassenzahl und als Reduktionszahl für die Schnabelspitze $12 - 2 - 5 = 5$, woraus ersichtlich ist, daß wir die Tangente der Schnabelspitze auch nicht höher einschätzen durften, da ihre Reduktionsziffer sonst der einer Spitze erster Art gleich käme. Die Wirkung der Schnabelspitze auf die Klassenzahl kann also gleich der von $2\frac{1}{2}$ Doppelpunkten gesetzt werden. In der Tat gibt die entsprechende Polarenbetrachtung die Gleichungen $y = x^2 \pm x^{\frac{5}{2}}$ für die Kurve und $y = x^2$ für die Polare und wir zählen wieder 5 Schnittpunkte.

Diese Aufstellung läßt aber einen gewichtigen Einwurf zu. Es ist ja einerseits schon mißlich, von einer gebrochenen Zahl von Doppelpunkten zu sprechen, wobei man sich schlechterdings nichts vorstellen kann. Plücker, der schon den Einfluß einer Schnabelspitze untersuchte, brachte allerdings die Innigkeit der Berührung der beiden Kurvenzweige

mit dieser Zahl in Verbindung. Aber es läßt sich direkt zeigen, allerdings etwas umständlich, — wir werden dies später (s. Abschnitt VIII, 3) im Zusammenhange beweisen —, daß die vorgelegte Kurve rational ist. Daraus ergibt sich mit zwingender Notwendigkeit, daß die Kurve 3 einfache Singularitäten haben, also die Schnabelspitze für zwei solche zählen muß. Dadurch wird das Problem der »Äquivalenzzahlen« erst ein bestimmtes. In der Tat geben die 2 Gleichungen

$$2d + 3r = 5$$

und

$$d + r = 2$$

nur das eine Wertepaar $d = 1$, $r = 1$, wonach wir die Schnabelspitze, als Punktsingularität betrachtet, gleich einem Doppelpunkt und einer Spitze zählen müssen. Und darauf hat zum erstenmal CAYLEY aufmerksam gemacht in einer berühmten Abhandlung[55]), die überhaupt den Anstoß gab zur eingehenderen Untersuchung der höheren Singularitäten.

§ 31. Äquivalenzzahlen. Lineare und superlineare Zweige.

66. *Wir werden nun suchen müssen, für jede höhere Singularität zwei Äquivalenzzahlen d und r zu bestimmen, so daß der Gesamteinfluß der Singularität auf die Klasse sowohl wie auf das Geschlecht gleich dem von d Doppelpunkten und r Spitzen gesetzt werden kann.* Eine weitere Frage ist dann, ob wir uns auch jede höhere Singularität durch Zusammenrücken der äquivalenten einfachen Singularitäten können entstanden denken. Wir werden im nächsten Abschnitt zeigen, daß dies wirklich der Fall ist. Doch müssen wir gleich hier feststellen, daß eine Äquivalenz überhaupt nur unter bestimmten Bedingungen und in gewissen Grenzen stattfinden kann. Für Relationen z. B., in welche zweite Differentiale eingehen — die Polaren, auf die es hier ankommt, enthalten ja nur die ersten —, gibt es, wie HALPHEN gezeigt hat, überhaupt keine Äquivalenzen, und für andere Fragen, wo die Geschlechtsgleichheit keine Rolle spielt, ist es nötig, allgemeinere Werte statt der »Prinzipaläqui-

---

[55]) *„On the higher singularities of a plane curve."* The Quart. J. p. appl. Math. 4, 1866, S. 212—222.

valenzen« (ZEUTHEN) einzuführen. Die Aufstellung dieser letzteren soll uns nun beschäftigen[56]).

Dazu müssen wir vor allem die Reihenentwicklung einer impliziten algebraischen Funktion $f^{(n)}(x, y) = 0$ etwas genauer betrachten. Wir wollen den singulären Punkt in den Anfangspunkt legen und voraussetzen, daß keine der Achsen eine ausgezeichnete Lage zu demselben habe, die Kurve insbesondere auch nicht berühre. Ist dann der singuläre Punkt von der »Ordnung« μ, wo μ die geringste Anzahl von Punkten ist, in denen ihn eine Gerade treffen kann, so wird es für diesen Punkt μ verschiedene Entwicklungen von y nach x geben, die ebensovielen »linearen Zweigen« der Singularität entsprechen. Diese μ linearen Zweige gruppieren sich aber, wie in der Theorie der algebraischen Funktionen genauer gezeigt wird[56a]), zu verschiedenen »superlinearen Zweigen« (CAYLEY) oder »Zykeln« (HALPHEN), deren einzelne Bestandteile durch Permutation der Einheitswurzeln ineinander übergehen. Wir erhalten die Entwicklung jedes solchen superlinearen Zweiges von der Ordnung $\Delta (\leqq \mu)$, nachdem das erste (lineare) Glied, das die Richtung der Tangente desselben angibt, bestimmt ist, aus dem analytischen Dreieck in der Form

$$y = B_0 x + B_1 \omega^{\beta_1} x^{\frac{\beta_1}{\Delta}} + B_2 \omega^{\beta_2} x^{\frac{\beta_2}{\Delta}} + \ldots \equiv \boldsymbol{B},$$

wo nach unseren Voraussetzungen 1) $B_0 \neq 0$, 2) wenn Δ der kleinste gemeinschaftliche Nenner aller einzelnen Nenner ist, die Zähler β_i sämtlich $> \Delta$ und steigend sind, 3) ω eine beliebige Wurzel der Gleichung $\omega^\Delta = 1$ ist. Negative Exponenten könnten nur auftreten, wenn der unendlichferne Punkt der y-Achse auf der Kurve läge, was wir ebenfalls ausschließen.

So hat die Schnabelspitze einen superlinearen Zweig von der Ordnung $\Delta = 2$, dessen Entwicklung, wenn wir

---

[56]) Bez. genauerer Literaturangaben müssen wir den Leser auf den Bericht von BRILL-NOETHER[12]), VI. Abschnitt, „*Die Theorie der singulären Punkte*", S. 367—402 verweisen. Wir können nur die hauptsächlich benützten Arbeiten anführen.

[56a]) Recht klar, wenn auch knapp, sind die diesbezüglichen Verhältnisse dargestellt bei SCHLESINGER, „*Differentialgleichungen*", S. S. XIII, § 58 und 59.

die Tangente derselben unter einem Winkel α ($\operatorname{tg}\alpha = B_0$) gegen die x-Achse geneigt sein lassen, lautet:

$$y = B_0 x + B_1 \omega^4 x^{\frac{4}{2}} + B_2 \omega^5 x^{\frac{5}{2}} + B_3 \omega^6 x^{\frac{6}{2}} + \ldots$$

oder, da hier $\omega = \pm 1$

$$y = B_0 x + B_1 x^2 \pm B_2 x^{\frac{5}{2}} + B_3 x^3 \pm B_4 x^{\frac{7}{2}} + \ldots$$

Auch die Spitze erster Art hat einen superlinearen Zweig von der Ordnung $\Delta = 2$; ihre Entwicklung lautet aber

$$y = B_0 x \pm B_1 x^{\frac{3}{2}} + B_2 x^2 \pm B_3 x^{\frac{5}{2}} + \ldots$$

und der Unterschied gegen die Schnabelspitze besteht eben im Auftreten des Gliedes mit $x^{\frac{3}{2}}$.

Die verschiedenen Zykeln einer Singularität geben zusammen $\Sigma\Delta = \mu$ Entwicklungen. Die einzelnen superlinearen Zweige können dabei lauter verschiedene oder auch beliebig viel gleiche Tangenten haben. D. h. es können in den Entwicklungen mehrere (oder auch alle) B_0 übereinstimmen; ja es können irgend zwei Entwicklungen auch bis auf eine größere, aber endliche Zahl von Gliedern identisch sein; man muß dann nur soweit entwickeln, bis die Zweige sich trennen. Ein Beispiel dafür haben wir schon an der Schnabelspitze gehabt. Auch ist natürlich unter den verschiedenen Werten Δ der Singularität von der Ordnung μ der Wert $\Delta = 1$ nicht ausgeschlossen. Dann enthält eben die Singularität auch lineare Zweige. So etwa die Kurve der Nr. 64, wenn $\lambda = 0$, in welchem Falle ein dreifacher Punkt mit zwei zusammenfallenden Tangenten entsteht, der, wie wir schon früher sahen (Nr. 60), einer Spitze, durch die ein linearer Zweig geht, entspricht. Sind sämtliche Δ gleich 1, so besteht die Singularität aus lauter einfachen Zweigen: das ist der k-fache Punkt mit k verschiedenen Tangenten.

Die Entwicklungen $\boldsymbol{B}$, deren einzelne Teile wir mit $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \ldots \boldsymbol{B}_\mu$ bezeichnen wollen, geben nur Entwicklungen für μ der n Wurzeln, die der Gleichung $f^{(n)}(x, y) = 0$ bei $x = 0$ entsprechen. Die Kurve schneidet die y-Achse noch in $n - \mu$ andern, wie wir vorausgesetzt haben, voneinander verschiedenen und endlichen Punkten, für die es ebenfalls Entwicklungen gibt, die sämtlich einfach sind und als erstes Glied eine Konstante haben, die dem Abstand des Schnitt-

punktes vom Anfangspunkt entspricht. So erhalten wir $n - \mu$ Entwicklungen

$$y = A + A_0 x + A_1 x^2 + A_2 x^3 + \ldots \equiv \boldsymbol{A},$$

gewöhnliche Potenzreihen, die für die implizite Funktion genau das repräsentieren, was die TAYLORsche Reihe für die Funktion $y = f(x)$ darstellt.

All diese Reihen sind innerhalb eines Bereiches, den wir unten angeben werden, konvergent, und zwar absolut konvergent, so daß man jedes Glied durch seinen absoluten Betrag (= Modul) ersetzen darf. Infolgedessen gibt nach einem schon von CAUCHY bewiesenen Satze das Produkt sämtlicher Reihen wieder eine absolut konvergente Reihe und wir können die Kurvengleichung durch dieses Produkt geradezu ersetzen:

$$\Pi(y - \boldsymbol{A}) \times \Pi(y - \boldsymbol{B}) \equiv f(x, y).$$

§ 32.

Diskriminantenindex. Multiplizität des Schnittes zweier Kurven.

67. Um nun den Einfluß des singulären Anfangspunktes auf die Klasse ν der Kurve festzustellen, ist es nötig, wie schon oben an den Beispielen gezeigt wurde, die Zahl der Schnittpunkte der ersten Polare eines hinreichend allgemeinen Punktes, also etwa der Ecke II $(x = z = 0)$, mit der gegebenen Kurve im singulären Punkte zu bestimmen. Betrachten wir also gleichzeitig die beiden Gleichungen

$$f = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

so gibt die Elimination von y eine Diskriminante $\Delta(x)$, die, weil sowohl das Glied mit x^n als das mit y^n in f vorkommen muß, wenn die unendlich fernen Punkte der beiden Achsen ganz allgemein gegen die Kurve liegen, in x vom Grade $n(n-1)$ wird. Die Gleichung $\Delta(x) = 0$ wird dann ν einfache Wurzeln x' haben, die den ν von der Ecke II aus möglichen Tangenten entsprechen. Der übrig bleibende Faktor $\Delta(x)/\Pi(x - x')$ ist vom Grade $n(n-1) - \nu$, welche Zahl wir den »Diskriminanten-Index« $j (= 2d + 3r)$ der Singularität heißen. In unserem Falle ist dieser Faktor einfach $x^{n(n-1)-\nu}$.

Die Wurzeln der Gleichung $\Delta(x) = 0$ liefern die sogenannten »Verzweigungsstellen« der Funktion. Die Wurzel mit dem kleinsten Modul gibt zugleich die Grenze der Konvergenz der obigen Reihen. Die Reihen konvergieren also absolut bis zum nächsten Verzweigungspunkt. Innerhalb dieser Konvergenzgrenzen können wir dann auch die Diskriminante $\Delta(x)$, die ja allgemein als das Produkt $\Pi(y_i - y_k)^2$ aller Differenzenquadrate der Wurzeln der Gleichung $f = 0$ definiert ist (S. Bauers *Vorlesungen über Algebra*, S. 86 ff.), als mit dem Produkt der Quadrate der Differenzen von je zwei der Reihen A und B identisch erachten.

68. Mit Hilfe dieser Auffassung gelingt es ohne Schwierigkeit, die »Multiplizität« des Schnittpunktes von f mit der Polare im singulären Punkt genau zu definieren. Wir wollen aber die Frage zuerst allgemeiner aufwerfen. Wir denken uns zwei Kurven $f^{(n)} = 0$ und $f_1^{(n')} = 0$ mit einem singulären Punkt der Ordnung μ bez. μ' im Anfangspunkt und fragen, wieviel Schnittpunkte der beiden Kurven wir für den Anfangspunkt rechnen müssen. Für f haben wir $n - \mu$ Entwicklungen A und μ vom Typus B; ebenso für f_1 $n' - \mu'$ Entwicklungen A' und μ' vom Typus B'. Wir bilden, wie oben, das Produkt aller Differenzen und lassen nur die Quadrate weg, da es sich nicht um eine Diskriminante handelt. Vielmehr wird dieses Differenzprodukt mit der Resultante von f und f_1 in x (nach Elimination von y) identisch sein. Dasselbe wird einen Faktor $\Pi(B - B')$ von $\mu \cdot \mu'$ Differenzen enthalten, die alle den Faktor x in einer gewissen Potenz λ vor die Klammer zu setzen gestatten, und es ist, wenn wir dies bei jeder Differenz tun,

$$\lim_{x=0} \frac{\Pi(B - B')}{x^{\Sigma\lambda}} = \text{konst.}$$

Wir erhalten demnach die Multiplizität des Schnittpunktes zweier Kurven in einem singulären Punkt, indem wir die $\mu \cdot \mu'$ Teil-Multiplizitäten λ der einzelnen Partialzweige, die durch

$$\lim_{x=0} \frac{y - y'}{x^{\lambda}} = \text{konst.}$$

definiert sind, addieren.

Beisp. 1. Wir betrachten den Schnitt der Hesseschen Kurve H in einem Doppelpunkt der Fundamentalkurve. Ist

$$f \equiv (y - Ax)(y - Bx) + u^{(3)} + \dots,$$

so haben wir die zwei Entwicklungen

$$y_1 = Ax + Rx^2 + \dots$$
$$y_2 = Bx + Sx^2 + \dots.$$

H hat in diesem Punkte einen Doppelpunkt mit denselben Tangenten wie die Kurve. Wir haben also für H die Entwicklungen

$$y_1' = Ax + R'x^2 + \dots$$
$$y_2' = Bx + S'x^2 + \dots.$$

Daraus ersehen wir, daß die Differenzen $y_1 - y_2'$, $y_2 - y_1'$ je einen Schnittpunkt ergeben, während die Differenzen $y_1 - y_1'$ und $y_2 - y_2'$ (die sich berührenden Zweige) zu je zwei Schnittpunkten Veranlassung geben. Dies gibt im ganzen die uns bekannte Multiplizität 6.

In einer Spitze hat die Fundamentalkurve etwa die Entwicklung

$$y = \pm A x^{\frac{3}{2}} + \dots$$

(die Beschränkung, daß die x-Achse nicht Tangente sei, kann man hier fallen lassen). H hat dort nach unseren früheren Sätzen zwei Entwicklungen

1) $y' = \pm B x^{\frac{3}{2}} + \dots,$

2) $y'' = Cx + Dx^2 + \dots$ (einen einfachen Zweig).

Der letztere Zweig schneidet die Spitze der Fundamentalkurve offensichtlich in zwei Punkten (jeden Partialzweig der Spitze einmal), da in $y - y''$ das Glied mit x das niedrigste bleibt, während die zwei Spitzen (= 4 Partialzweige) sich je in $\frac{3}{2}$ Punkten schneiden. Dies gibt das bekannte Resultat: $4 \cdot \frac{3}{2} + 2 = 8$.

Beisp. 2. Betrachten wir noch den Schnitt zweier Kurven mit Spitzpunkt einerseits und Schnabelspitze andererseits, wobei die singuläre Tangente gemeinschaftlich sei, also etwa die beiden Kurven von Seite 109. Die Entwicklungen sind

a) $y = x^{\frac{4}{3}} + \dots$ für den Spitzpunkt, eine Superlinearität von der Ordnung 3 mit den 3 Partialzweigen

$$y = x^{\frac{4}{3}}; \quad y = \varepsilon x^{\frac{4}{3}}; \quad y = \varepsilon^2 x^{\frac{4}{3}} \quad [\varepsilon^3 = 1].$$

b) $y' = x^2 \pm x^{\frac{5}{2}} + \dots$ für die Schnabelspitze, wie schon des Näheren erörtert.

Man erhält aus den $3 \cdot 2 = 6$ Kombinationen der Partialzweige die Multiplizität des Schnittes im Anfangspunkt zu

$3 \cdot \frac{4}{3} + 3 \cdot \frac{4}{3} = 8$. Bricht man die Reihen bei den angegebenen Gliedern ab, so läßt sich dieses Resultat durch Elimination von y auch direkt erweisen, indem ein Faktor x^8 vor die Klammer tritt.

69. Auch die Diskriminante $\Delta(x)$ wird sich in der Form des Differenzenprodukts, wie vorhin die Resultante, in zwei Teile spalten lassen, einen sogenannten »beweglichen« Faktor, der von den ν eigentlichen Tangenten herrührt, und den »festen« Faktor vom Grade $n(n-1)-\nu$, der dem singulären Punkt seine Entstehung verdankt. Der letztere ist also nichts anderes als das Produkt $\Pi(B_i - B_k)^2$, das $\frac{1}{2}\mu(\mu-1)$ Differenzen enthält und durch sämtliche μ Partialzweige veranlaßt wird. Die Ordnung des Verschwindens dieses Produktes ist aber nach der vorigen Nummer nichts anderes als die (wegen der Quadrate) doppelte Zahl der Schnittpunkte aller Partialzweige untereinander, d. h. die doppelte Zahl der Schnittpunkte der Kurve mit sich selbst im singulären Punkt. Diese doppelte Zahl ist also gleich dem Diskriminantenindex j. Da aber $\Delta(x)$ das Resultat der Elimination von y aus f und $\frac{\partial f}{\partial y}$ ist, so ist diese Zahl j zugleich die doppelte Anzahl der Schnittpunkte der Kurve und ihrer ersten Polare im singulären Punkt, die wir ursprünglich zu bestimmen suchten. Wir fassen das Resultat unserer bisherigen Untersuchungen in den Satz zusammen:

Die Zahl $j = 2d + 3r$, welche die Reduktion der Klasse einer Kurve, die durch eine Singularität hervorgebracht wird, angibt, erhält man, indem man die Multiplizität des Schnittes der Kurve mit sich selbst in der Singularität doppelt nimmt.

Das ist CAYLEYs mit genialer Divination vorausgeahntes Ergebnis, für das erst H. J. STEPHEN SMITH[57]) einen einwandfreien Beweis erbrachte, den wir in der Hauptsache wiedergegeben haben. Der Leser überzeuge sich nun an den Beispielen Nr. 64 und 65 (Berührungsknoten und Schnabelspitze), die wir einleitend behandelten, selbst, wie sich nach diesem Satz ohne besondere Polarenaufstellung die Reduktionszahlen 4 bez. 5 sofort ergeben.

---

[57]) *„On the higher singularities of plane curves."* Proc. London Math. Soc. **6**, 1874/75, S. 153—182.

§ 33. Transformation zu Linienkoordinaten. Gegensatz zwischen Punkt- und Liniensingularitäten.

70. Wie wir schon am Beispiel des Berührungsknotens sahen, ist eine höhere Singularität eines Punktzweiges möglicherweise auch eine solche für die als Tangentengebilde betrachtete Kurve, ja gewisse höhere Singularitäten werden vielleicht überhaupt nur Liniensingularitäten sein. Um dies näher zu untersuchen, ist es nötig, unsere Entwicklungen zu Linienkoordinaten zu transformieren. Wir werden aber, da dies im folgenden die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt, wieder die x-Achse als Tangente der Singularität einführen, während die y-Achse nach wie vor nicht berühren soll, damit keine echten Brüche in der Entwicklung auftreten. Dann haben wir

$$(1) \qquad y = B_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta}} + B_2 x^{\frac{\beta_2}{\Delta}} + \dots \qquad [\beta_i > \Delta]$$

β_1 ist die Zahl der Punkte, die die Tangente mit dem Zweig im Anfangspunkt gemein hat. Die Gleichung der Tangente im Punkte (ξ, η, ζ) ist allgemein

$$(2) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_\xi x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_\eta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_\zeta z \equiv u x + v y + w z = 0 .$$

Singulär ist aber eventuell nur die Linie $y = 0$, d. h. $u = 0$, $w = 0$. Wir werden also zweckmäßig $v = 1$ setzen und die Entwicklung von w nach u zu bestimmen suchen. Dann lautet die Identität (2)

$$(2^*) \qquad \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}\right)_{\xi, \eta, \zeta} x + y + \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial y}}\right)_{\xi, \eta, \zeta} \equiv u x + y + w ,$$

und man erhält, wenn man noch $\frac{\partial f}{\partial z}$ vermittels des Euler-schen Theorems durch $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ ausdrückt

$$(3) \qquad u = -\frac{dy}{dx} \qquad w = x\frac{dy}{dx} - y .$$

Aus (1) ergibt sich dann

$$(4)\qquad u = -\frac{\beta_1}{\Delta} B_1 x^{\frac{\beta_1 - \Delta}{\Delta}} - \ldots$$

$$(5)\qquad w = -\frac{\beta_1 - \Delta}{\Delta} B_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta}} + \ldots .$$

Aus diesen beiden Reihen muß x eliminiert werden. Zu diesem Zwecke kehrt man die Reihe (4) um, indem man $x^{\frac{1}{\Delta}}$ durch Potenzen von $u^{\frac{1}{\beta_1 - \Delta}}$ ausdrückt; setzen wir diese neue Reihe in (5), so kommt

$$(6)\qquad w = B_1' u^{\frac{\beta_1}{\beta_1 - \Delta}} + \ldots,$$

eine Reihe, die mit der gesuchten

$$(6^*)\qquad w = B_1' u^{\frac{\beta_1'}{\Delta'}} + B_2' u^{\frac{\beta_2'}{\Delta'}} + \ldots$$

identisch sein muß, in welcher β_1' die Zahl der Tangenten ist, die für die Singularität zusammenfallen, und Δ' (der kleinste gemeinschaftliche Nenner aller Teilnenner) der Grad der Vielfachheit des Zweiges als Linienort: die »Klasse« des Zweiges.

Da wir bei der Umkehrung der Reihen (4) nur das erste Glied benützten, können wir aus unserem Ergebnis noch nicht schließen, daß $\Delta' = \beta_1 - \Delta$; denn es wäre immerhin möglich, daß in (6) alle Glieder, die den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner selbst im Nenner haben, fehlen. Jedenfalls ist aber

$$\frac{\beta_1'}{\Delta'} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - \Delta}; \qquad [\Delta' \lesseqgtr \beta_1 - \Delta \quad \text{und} \quad \beta_1' \lesseqgtr \beta_1].$$

Nun kann man aber umgekehrt auch aus (6) sich die Reihe (1) abgeleitet denken. Dann müßte ebenso $\beta_1 \lesseqgtr \beta_1'$ sein. Daher ist notwendig

$$(7)\qquad \Delta' = \beta_1 - \Delta; \quad \beta_1' = \beta_1.$$

Zusammenfassend ausgedrückt[58]):

[58]) Vgl. Zeuthen, *„Note sur les singularités des courbes planes."* Math. Ann. **12**, 1876, S. 210—220.

Die Zahl β_1 der Schnittpunkte der Tangente eines superlinearen Zweiges, die zusammenfallen, ist gleich der Zahl β_1' der Tangenten des singulären Punktes, welche in die singuläre Tangente fallen. Sind Δ und Δ' Ordnung und Klasse des Zweiges, so ist immer

$$\Delta + \Delta' = \beta_1 = \beta_1' .$$

Beisp. 1. Für eine binomische Kurve von der Form

$$y = B x^{\frac{m}{\Delta}}$$

macht die Transformation keinerlei Schwierigkeit. Die allgemeine Formel ist aber nicht sehr handlich. Wir wollen die Spitzpunktsparabel $y = x^{\frac{4}{3}}$ als Beispiel nehmen. Es ergibt sich

$$u = -\tfrac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} \qquad w = \tfrac{1}{3} x^{\frac{4}{3}} ;$$

daher schließlich

$$w = \frac{3^3}{4^4} u^4 .$$

Es ist $\Delta' = m - \Delta = 1$. Der Spitzpunkt ist nur eine Punktsingularität.

Beisp. 2. Für die Schnabelspitze muß $\Delta' = 4 - 2 = 2$ werden; $\beta_1' = \beta_1 = 4$, d. h. die Tangente der Singularität zählt tatsächlich vierfach, wie wir dies in Nr. 65 annahmen. Die Transformation zu Linienkoordinaten geht, unter Berücksichtigung der ersten beiden Glieder, folgendermaßen vor sich. Aus

$$y = x^2 + x^{\frac{5}{2}} + \dots$$

erhalten wir

(I) $u = -2x - \tfrac{5}{2} x^{\frac{3}{2}} + \dots ;$ (II) $w = x^2 + \tfrac{3}{2} x^{\frac{5}{2}} + \dots .$

Setzen wir, um die Reihe (I) umzukehren, mit unbestimmten Koeffizienten

(III) $$x^{\frac{1}{2}} = \alpha u^{\frac{1}{2}} + \beta u + \gamma u^{\frac{3}{2}} + \dots ,$$

so ergibt sich durch Einsetzen in (I)

$$\begin{aligned} u &\equiv -2(\alpha u^{\frac{1}{2}} + \beta u + \dots)^2 - \tfrac{5}{2}(\alpha u^{\frac{1}{2}} + \beta u + \dots)^3 + \dots \\ &\equiv -2\alpha^2 u - \left.\begin{matrix} 4\alpha\beta \\ - \tfrac{5}{2}\alpha^3 \end{matrix}\right| u^{\frac{3}{2}} + \dots \end{aligned}$$

und hieraus $\alpha^2 = -\frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{i}{\sqrt{2}}$, was bei Benutzung des ersten Gliedes allein selbstverständlich. Ferner $4\beta + \frac{5}{2}\alpha^2 = 0$, woraus $\beta = \frac{5}{16}$; wir erhalten also

(IV) $$x^{\frac{1}{2}} = \frac{i}{\sqrt{2}} u^{\frac{1}{2}} + \tfrac{5}{16} u + \dots .$$

Substituiert man diese Reihe in (II), so kommt

$$w = \left(\frac{i}{\sqrt{2}} u^{\frac{1}{2}} + \tfrac{5}{16} u + \ldots\right)^4 + \frac{3}{2}\left(\frac{i}{\sqrt{2}} u^{\frac{1}{2}} + \tfrac{5}{16} u + \ldots\right)^5 + \ldots$$

$$= \frac{u^2}{4} + \left.\begin{array}{l} 4 \cdot \dfrac{i^3}{2\sqrt{2}} \cdot \dfrac{5}{16} \\ \quad + \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{i^5}{4\sqrt{2}} \end{array}\right| u^{\frac{5}{2}} + \ldots = \frac{u^2}{4} - i \cdot \frac{u^{\frac{5}{2}}}{4\sqrt{2}} + \ldots$$

$$= \left(\frac{u}{2}\right)^2 - i\left(\frac{u}{2}\right)^{\frac{5}{2}} + \ldots .$$

Hieraus ist ersichtlich, daß es nur für negative u reelle Werte von w gibt. Setzen wir etwa statt $-\frac{u}{2}$ einfach u, so erhalten wir die der Punktentwicklung durchaus reziproke

$$w = u^2 + u^{\frac{5}{2}} + \ldots \qquad \left[= u^{\frac{4}{2}} + u^{\frac{5}{2}} + \ldots\right].$$

§ 34. Kuspidalindex. Beispiele.

71. Wir werden nun genau ebenso, wie für die Entwicklung in Punktkoordinaten, einen Diskriminantenindex $\iota = 2\delta + 3\varrho$ für die Singularität in Linienkoordinaten erhalten. Zur Bestimmung der vier Äquivalenzzahlen liefern uns dann die Plückerschen Gleichungen, da es deren bloß drei unabhängige gibt, nur noch eine Relation, als welche man etwa die Gleichung

$$\bar{r} - \bar{\varrho} = 3(n - \nu)$$

benutzen kann, wo $\bar{r}$ und $\bar{\varrho}$ die Gesamtzahlen der Spitzen resp. Wendetangenten bedeuten. Eine der vier Größen bleibt vollkommen willkürlich und wird erst dadurch bestimmt, daß man die Reduktion, welche die Singularität am Geschlecht der Kurve hervorbringt, gleich $d + r$ setzt.

Zur Bestimmung der Zahl r denken wir unsere Kurve C, die wir der Einfachheit wegen in O mit einer einzigen Superlinearität der Ordnung Δ begabt denken, auf eine andere Kurve C' von derselben Ordnung und Klasse (n bez. ν) eindeutig bezogen, die die d Doppelpunkte und r Spitzen getrennt enthält. Die Möglichkeit der Kurve C' ist ja sicher und die Frage, ob C aus C' durch Zusammenrücken der einfachen Singularitäten entstehen kann, ist hier gleich-

gültig. Wir wenden dann das ZEUTHENsche Verfahren an (s. Nr. 45), indem wir uns zwei beliebige feste Punkte A und A' der Ebene denken und eine Kurve Γ betrachten, die den Ort der Durchschnittspunkte von AP und $A'P'$ bildet, wo P und P' entsprechende Punkte beider Kurven sind. Dann ergibt sich nach der Methode von Nr. 45 die Ordnung dieser Kurve gleich $2n$, mit A und A' je als n-fachem Punkt. Um die Klasse zu erhalten, zählen wir einerseits die Tangenten von A, andererseits die von A' aus. Beide Zahlen müssen übereinstimmen. Wir finden wie früher 1) $2n$ Tangenten, die in A bez. A' zusammenfallen, 2) ν Tangenten, die den ν Tangenten von A bez. A' an C bez. C' entsprechen.

Besonders müssen wir nur die Gerade AO betrachten. Dem Punkt O von C entsprechen als Δ-elementigem Punkt Δ konsekutive Punkte auf C', so daß also AO die Kurve Γ in einem Punkte S Δ-punktig berühren muß. Hier sind dann zwei Fälle zu unterscheiden. I) Entweder befinden sich die Δ konsekutiven Punkte auf einem einfachen Zweig von C', so daß also umgekehrt allen Spitzen von C' nur einfache Punkte von C entsprechen. Dann hat Γ in S eine Singularität, die von AS in Δ Punkten, von $A'S$ aber nur in einem Punkte getroffen wird. Nach Gleichung (7) von Nr. 70 ist also die Klasse der Singularität, d. h. die Anzahl der mit AS zusammenfallenden Tangenten $\Delta - 1$ und die Klasse von Γ ergibt sich zu $2n + \nu + \Delta - 1$. Andererseits entspricht jedem durch A' und eine Spitze von C' gehenden Strahl eine Tangente von A' an Γ, so daß sich für die Klasse die Zahl $2n + \nu + r$ ergibt. Daraus erhält man

$$r = \Delta - 1 .$$

Es kann aber II) vorkommen, daß die Δ konsekutiven Punkte auf C' eine Spitze von C' mitinbegreifen. Dann wird die Singularität S von Γ durch AS in Δ, durch $A'S$ in zwei Punkten getroffen, und ihre Klasse ist $\Delta - 2$ (mit AS als Tangente), so daß die Klasse von Γ sich zu $2n + \nu + \Delta - 2$ ergibt. Gleichzeitig zählt man von A' aus eine Tangente weniger, weil die durch eine der Spitzen gehende Gerade nicht Tangente ist, und erhält für dieselbe Klassenzahl $2n + \nu + r - 1$, woraus sich durch Gleichsetzung wieder

$$r = \Delta - 1$$

ergibt. Heißen wir r den »**Kuspidalindex**« der Singularität, so ergibt sich demnach:

Der Kuspidalindex r einer Singularität ist um 1 geringer als die Ordnung Δ.

In gleicher Weise erhält man $\varrho = \Delta' - 1$, und wir haben nun die Mittel an der Hand, jede vorliegende Singularität, wenn wir nur die Entwicklungen weit genug führen, in ihre äquivalenten Bestandteile aufzulösen.

Beisp. 1. Der Berührungsknoten erweist sich als äquivalent mit 2 Doppelpunkten und 2 Doppeltangenten. Denn die Parabel $y = Ax^2$ gibt zu Linienkoordinaten transformiert $w = \frac{1}{4A} u^2$. Die Singularität ist also zu sich selbst reziprok, ohne Wendetangenten und Spitzen.

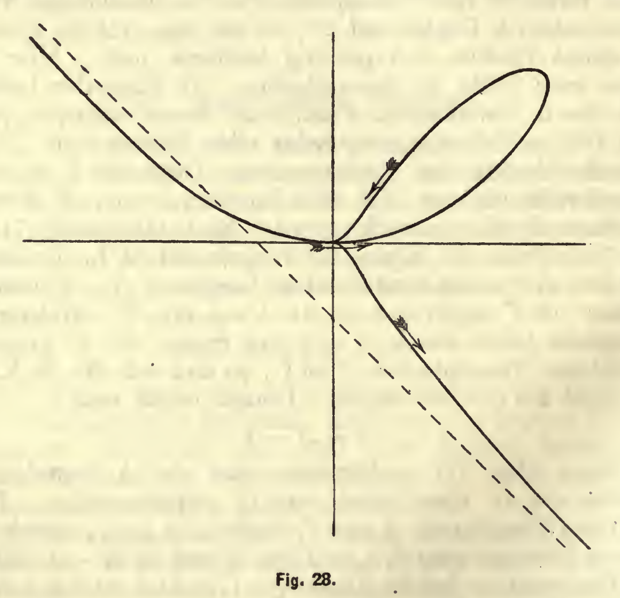


Fig. 28.

Beisp. 2. Der dreifache Punkt mit zwei zusammenfallenden Tangenten und den Entwicklungen

$$y = \pm x^{\frac{3}{2}} + \ldots \quad \text{und} \quad y = A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$$

ist äquivalent 2 Doppelpunkten und einer Spitze, wie wir schon früher angenommen haben.

Beisp. 3. Hat aber der durch die Spitze gehende Zweig dieselbe Tangente wie die Spitze, d. h. existieren zwei Entwicklungen

$$y = \pm A_1 x^{\frac{3}{2}} + \dots \quad \text{und} \quad y = A_2 x^2 + \dots,$$

so ist

$$2d + 3r = 2 \cdot 3 \cdot \tfrac{3}{2} = 9, \quad r = 1,$$

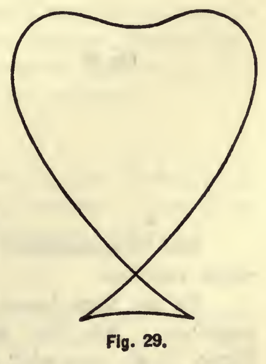
also $d = 3$. Es tritt demnach noch ein weiterer Doppelpunkt auf. Ein Beispiel dafür ist die Kurve der Fig. 28 mit der Gleichung

$$y^3 - 4x^3 y + x^5 + y^5 = 0,$$

die dem Aussehen nach auch aus einer Serpentine und einem geschlossenen Teil mit Schnabelspitze bestehen könnte, was aber eine noch höhere Singularität gäbe. Die Entwicklungen zeigen, daß die Kurve in der Richtung der Pfeile zu durchlaufen ist. Reelle Asymptote ist $x + y + \frac{4}{5} = 0$. Die Reihen lauten $y = \pm 2x^{\frac{3}{2}} + \dots$ und $y = \frac{1}{4}x^2 + \dots$.

Beisp. 4. Wir betrachten noch den Spitzpunkt mit den Gleichungen $y = x^{\frac{4}{3}} + \dots$ und $w = Au^4 + \dots$. Die 3 Zweige ergeben $\frac{4}{3} \cdot 3 = 4$ Schnittpunkte und es ist also $j = 8$. Da $r = 2$, ergibt sich $d = 1$, während der Zweig in Linienkoordinaten einfach ist. Der Spitzpunkt ist also 2 Spitzen und einem Doppelpunkte äquivalent, aus welchem Grunde er auch den Namen »Bikuspidalpunkt« erhielt.

Dualistisch dazu ist der Flachpunkt mit den Gleichungen $y = x^4 + \dots$ und $w = Bu^{\frac{4}{3}} + \dots$. Der Zweig ist in Punktkoordinaten einfach, in Linienkoordinaten dreifach und die Singularität ist äquivalent zwei Wendetangenten und einer Doppeltangente, weswegen der Flachpunkt vielfach auch »Undulationspunkt« heißt. Die Gleichung $y = x^2(x - \delta)^2$ oder auch $y = (x^2 - \delta^2)^2$ gibt eine Auflösung desselben, die für verschwindendes δ in den Flachpunkt übergeht.


Fig. 29.

Die schon in Nr. 60, Beisp. 3 behandelte Kurve

$$y^3 = x^4 + y^4$$

vereinigt die beiden Singularitäten. In Fig. 29 sind beide schematisch aufgelöst. Die so erhaltene Kurve ist demnach zu sich selbst reziprok (vgl. Nr. 146).

Beisp. 5. Wir machen noch auf die binomischen Parabeln 5. Ordnung aufmerksam, die wir wenigstens (mit dem Namen der betreffenden Singularität) aufführen wollen:

1) $y = x^5$; Wendeflachpunkt; $\delta = 3$, $\varrho = 3$.
2) $y^2 = x^5$; Rückkehrflachpunkt; $r = d = 1$, $\varrho = \delta = 2$.
3) $y^3 = x^5$; Wendespitzpunkt; $r = d = 2$, $\varrho = \delta = 1$.
4) $y^4 = x^5$; Rückkehrspitzpunkt; $d = 3$, $r = 3$.

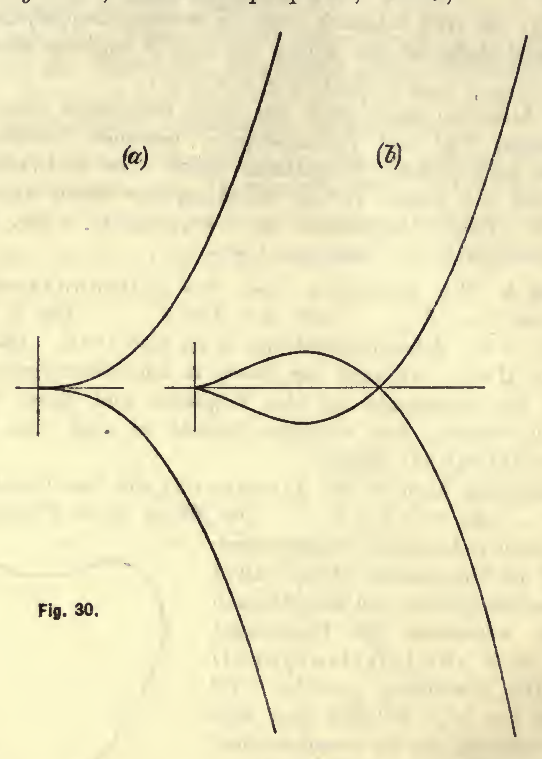


Fig. 30.

Die Singularitäten sind, wie angedeutet, zu einander paarweise reziprok.

Es sei dem Leser überlassen, sich die Figuren selbst herzustellen. Nur für den Rückkehrflachpunkt geben wir die Figur 30 (a), zugleich mit einer aufgelösten Form von der Gleichung $y^2 = x^2 (x + \delta)^3$, die allerdings den Nachteil hat, daß die beiden Doppeltangenten der Singularität konjugiert imaginär sind [Fig. 30 (b)]. Bez. der ganz reellen Auflösung siehe die Bem. in Nr. 86.

ABSCHNITT VIII.

TRANSFORMATION DER KURVEN.

1. Die rationalen Quartiken im allgemeinen.

§ 35. Die quadratische Transformation.

72. Wir haben im Vorhergehenden (s. Nr. 45 und 71) mehrmals von einer eindeutigen Beziehung zweier Kurven C und C' Gebrauch gemacht. In welcher Weise eine solche Beziehung, sei es geometrisch, sei es analytisch herzustellen sei, wurde offen gelassen. Wir wissen freilich längst, daß die lineare Transformation (geometrisch die Zentralprojektion) eine solche vermittelt. Da hierbei jedoch Ordnung und Klasse, sowie die Art der etwa auftretenden Singularitäten unverändert bleiben, so würde diese in den erwähnten Fällen nicht ausgereicht haben.

Es ist nun aber offenbar, daß eine Transformation, die ein eindeutiges Entsprechen der Punkte zweier Ebenen vermitteln soll, rational und rational umkehrbar sein muß. Die Transformationsformeln müßten also etwa lauten

$$x_1 : x_2 : x_3 = X_1' : X_2' : X_3' \,,$$

wo die X_i' homogene Formen n^{ter} Ordnung in den Variablen x_i' bedeuten, und es müßte, wenn die X_i analoge Formen in den Variablen x_i vorstellen, eine Umkehrung geben

$$x_1' : x_2' : x_3' = X_1 : X_2 : X_3 \,.$$

Eine solche Transformation der Ebene heißt nach ihrem Begründer CREMONAsche Transformation. Jede solche läßt sich aber nach einem Satze von NOETHER durch eine Folge von einfacheren, quadratischen Transformationen ersetzen. Wir betrachten daher, da die allgemeine CREMONAsche Transformation in der Sammlung Schubert durch DOEHLEMANN (*Geometrische Transformationen,* II. Teil) eine ausführ-

liche Darstellung gefunden hat, nur quadratische Transformationen und verweisen auch bez. der **allgemeinen** Einführung dieser letzteren auf DOEHLEMANNs Buch.

73. Jede quadratische Transformation kann durch passende Wahl des Koordinatendreiecks auf eine sehr einfache kanonische Form gebracht werden. Man braucht dann nur in der Gleichung einer Kurve die Variablen durch ihre reziproken Werte zu ersetzen. Die Transformationsformeln lauten für diesen einfachsten Fall:

$$(1) \qquad x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{x_1'} : \frac{1}{x_2'} : \frac{1}{x_3'} = x_2' x_3' : x_1' x_3' : x_1' x_2' .$$

Diese lassen sich auch sofort rational umkehren:

$$(1^*) \qquad x_1' : x_2' : x_3' = \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_3} = x_2 x_3 : x_1 x_3 : x_1 x_2 .$$

Wir wollen die Ebenen der x_i und der x_i' sich decken lassen und alle Koordinaten auf dasselbe Fundamentaldreieck beziehen. Dann bemerken wir sofort, daß dem zweifachen System aller Geraden der einen Ebene

$$(2) \qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

das zweifach unendliche System (Netz) aller Kegelschnitte entspricht, die durch die drei Koordinatenecken gehen

$$(2^*) \qquad a_1 x_2' x_3' + a_2 x_1' x_3' + a_3 x_1' x_2' = 0 .$$

Das eindeutige Entsprechen der Punkte wird so auch geometrisch deutlich, indem einerseits der Punkt P durch zwei Gerade des Systems (2) bestimmt gedacht werden kann, während der entsprechende Punkt P' sich als vierter Schnittpunkt zweier Kegelschnitte des Netzes (2*) ergibt.

Die Koordinatenecken spielen auch insofern eine ausgezeichnete Rolle, als sie Ausnahme-(Haupt-)Punkte der Transformation bilden. Denn der Ecke $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ z. B. entspricht nicht wieder ein einzelner Punkt, sondern die ganze gegenüberliegende Fundamentalseite $x_3' = 0$. Einer Geraden durch diese Ecke, etwa $x_1 + k x_2 = 0$ entspricht der zerfallene Kegelschnitt $x_2' x_3' + k x_1' x_3' = 0$, oder wenn man die Seite x_3' abtrennt, die Gerade durch denselben Eckpunkt $x_2' + k x_1' = 0$, anders geschrieben $x_1' + \frac{1}{k} x_2' = 0$.

Nehmen wir als Einheitspunkt den Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises, so daß also, was man bei DOEHLEMANN [5]) nachsehen kann, die Koordinaten die senkrechten Abstände von den Seiten des Dreiecks sind, so läßt sich die Transformation geometrisch sehr einfach darstellen. Denn einer Geraden durch einen Eckpunkt entspricht dann, wegen des reziproken Parameters, die Gerade durch denselben Eckpunkt, die zur Halbierungslinie des Dreieckswinkels symmetrisch liegt, die man also erhält, indem man den Winkel, den die Gerade mit der einen Dreiecksseite bildet, an die andere (unter Beobachtung des Sinnes) anträgt. Zu einem Punkte P konstruiert man demnach den entsprechenden P', indem man P mit zwei Ecken verbindet und zu diesen Verbindungsstrahlen die entsprechenden zeichnet [59]). Für unsere Zwecke genügt dies. Wegen der Konstruktion im allgemeinen Falle sehe man die Darstellung bei DOEHLEMANN.

Wir werden nun auch besser verstehen, wieso es möglich ist, daß eine ganze Koordinatenseite sich in einen einzigen Punkt abbildet. Jedem Punkte von $x_3' = 0$ entspricht nämlich eine bestimmte Richtung durch die Ecke $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Da nun irgend eine Gerade jede Koordinatenseite einmal schneidet, so muß ihr Bild (der Kegelschnitt) durch jede Koordinatenecke einmal gehen mit einer Richtung, die durch Transformation des Strahles erhalten wird, der die Ecke mit dem Schnittpunkt auf der Gegenseite verbindet. Einer n-ik C_n, die jede Koordinatenseite n-mal trifft, entspricht demnach als Bild eine C_{2n}, die durch jede Ecke n-mal geht. Und umgekehrt: Wenn die zu transformierende Kurve durch eine Ecke k-mal geht, so tritt im Bilde die Gegenseite als k-facher Bestandteil auf, der wegzulassen ist. Einer Kubik also, die etwa in einer Ecke einen Doppelpunkt hat, während sie die anderen Ecken nicht enthält, entspricht eine Quartik mit dreifachem Punkt in der einen Ecke, die durch die beiden anderen Ecken einfach hindurchgeht.

---

[59]) Nach der Bezeichnungsweise der neueren Dreiecksgeometrie sind die Punkte P und P' »Winkelgegenpunkte«. Einem bekannten Satz zufolge (s. etwa SALMON-FIEDLER, *„Analytische Geometrie der Kegelschnitte“*, § 202 und § 330, Beisp. 3) ist P' auch der zweite Brennpunkt eines Kegelschnitts, der die Koordinatenseiten berührt und P zu einem Brennpunkt hat.

§ 36. Rationale Quartiken mit getrennten Doppelpunkten.

74. Die nächstliegende Anwendung der erläuterten Transformation bilden die rationalen Quartiken mit drei getrennten Doppelpunkten. Verlegen wir nämlich die Koordinatenecken in die drei Doppelpunkte einer solchen Quartik, so wird das Bild derselben ein ganz allgemein gelegener Kegelschnitt. Ist dessen Gleichung

$$(3)\quad \begin{cases} \mathsf{K} \equiv a_{11}\, x_1^2 + a_{22}\, x_2^2 + a_{33}\, x_3^2 + 2\, a_{12}\, x_1\, x_2 \\ \qquad + 2\, a_{23}\, x_2\, x_3 + 2\, a_{13}\, x_1\, x_3 = 0\,, \end{cases}$$

so wird die Gleichung der entsprechenden Quartik, wenn wir der Einfachheit wegen die Striche an den Koordinaten fortlassen,

$$(3^*)\quad \begin{cases} \mathsf{Q} \equiv a_{11}\, x_2^2\, x_3^2 + a_{22}\, x_1^2\, x_3^2 + a_{33}\, x_1^2\, x_2^2 + 2\, a_{12}\, x_1\, x_2\, x_3^2 \\ \qquad + 2\, a_{23}\, x_2\, x_3\, x_1^2 + 2\, a_{13}\, x_1\, x_3\, x_2^2 = 0\,. \end{cases}$$

Ist aber der Kegelschnitt in der Parameterdarstellung gegeben

$$(4)\qquad x_1 : x_2 : x_3 = f_1(\lambda) : f_2(\lambda) : f_3(\lambda)\,,$$

wo

$$f_i(\lambda) \equiv a_i\, \lambda^2 + b_i\, \lambda + c_i\,,$$

so erhält man durch die Transformation die Parameterdarstellung (s. Nr. 43) der rationalen Quartik in der kanonischen Form

$$(4^*)\qquad x_1 : x_2 : x_3 = f_2 f_3 : f_3 f_1 : f_1 f_2\,.$$

Je nachdem K eine Seite des Fundamentaldreiecks in reell getrennten, zusammenfallenden oder konjugiert imaginären Punkten schneidet, wird die Quartik in der gegenüberliegenden Ecke einen Knoten, eine Spitze oder einen isolierten Punkt haben. In Fig. 31 sind alle drei Fälle vereinigt, indem wir einen Kreis transformierten, der eine Seite berührt, während er die zweite in reell getrennten, die dritte in imaginären Punkten schneidet. So läßt sich hier auch der Übergang vom Knoten mit Schleife (Ecke C) durch die Spitze (Ecke B), [wo die Koinzidenz konsekutiver Punkte durch die beiden zusammenfallenden Punkte 1, 2, welche die tangierende Koordinatenseite mit dem Kreis gemein hat, deutlich veranschaulicht wird] zum isolierten Punkt (Ecke A) genau verfolgen. Das eindeutige Entsprechen haben wir

durch übereinstimmende Numerierung einzelner Punkte angedeutet. Der Leser wird sich unschwer die Kurven mit drei Knoten, drei Spitzen usw. vorstellen.

Die Quartik Q wird reell durchs Unendliche gehen oder nicht, je nachdem der Kegelschnitt K das Bild der unendlichfernen Geraden reell oder imaginär trifft. Dieses ist jedenfalls ein Kegelschnitt durch die Koordinatenecken, bei unserer speziellen Annahme der Koordinaten jedoch der Umkreis des Fundamentaldreiecks. Denn ziehen wir, um

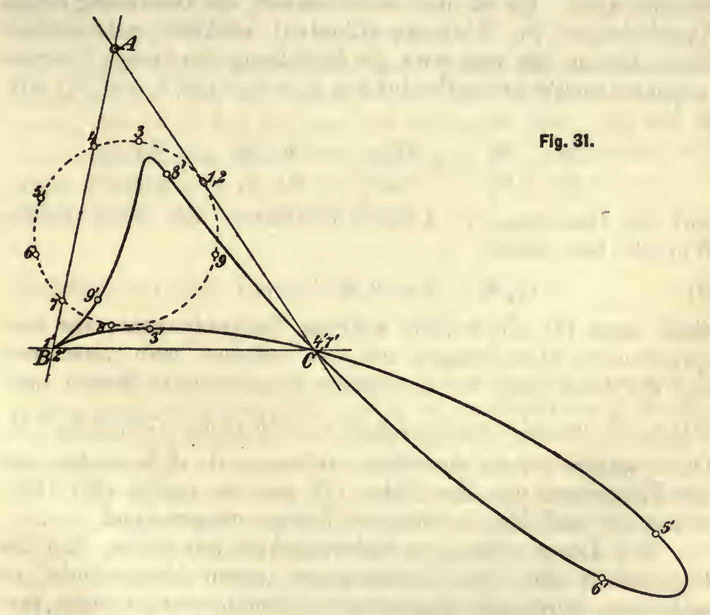


Fig. 31.

die Tangente des gesuchten Kegelschnitts in A zu bestimmen, eine Parallele durch A zu BC — wir bitten den Leser diese kleine Konstruktion selbst auszuführen — und tragen den $\sphericalangle \gamma = \sphericalangle C$ links an AB an, so berührt nach dem Satz vom Tangenten-Sehnenwinkel der Umkreis die so gefundene Tangente und ebenso die in B und C entsprechend konstruierten Geraden. Der Umkreis muß also mit dem gesuchten Kegelschnitt identisch sein, da er mit ihm 3 Punkte mit ihren Tangenten gemein hat.

Unsere Kurve mußte folglich vollständig ins Endliche

zu liegen kommen, da der transformierte Kreis ganz im Innern des Umkreises liegt.

75. Aus der allgemeinen Gleichung (3*) erhalten wir die drei Tangentenpaare der Doppelpunkte

$$a_{22}x_1^2 + 2\,a_{12}x_1x_2 + a_{11}x_2^2 = 0\,; \quad a_{33}x_2^2 + 2\,a_{23}x_2x_3 + a_{22}x_3^2 = 0\,;$$
$$a_{11}x_3^2 + 2\,a_{13}x_1x_3 + a_{33}x_1^2 = 0\,.$$

Hieraus erkennt man nach der in Beisp. 3 von Nr. 14 gegebenen Regel, daß diese 6 Geraden Tangenten eines Kegelschnitts sind. Es ist aber nicht schwer, die Gleichung dieses Kegelschnitts (in Linienkoordinaten) wirklich aufzustellen. Denn denken wir uns etwa die Gleichung des ersten Tangentenpaares zerlegt in das Produkt $(u_1x_1 + u_2x_2)(u_1'x_1 + u_2'x_2) = 0$, so ist

$$\frac{u_2}{u_1} + \frac{u_2'}{u_1'} = +\frac{2\,a_{12}}{a_{22}}\,, \qquad \frac{u_2}{u_1}\cdot\frac{u_2'}{u_1'} = +\frac{a_{11}}{a_{22}}$$

und die Gleichung in Linienkoordinaten, die diese beiden Wurzeln hat. lautet

$$(5) \qquad a_{22}u_2^2 - 2\,a_{12}u_2u_1 + a_{11}u_1^2 = 0\,.$$

Stellt man für die beiden anderen Tangentenpaare die entsprechenden Gleichungen auf, so erkennt man unschwer, daß die Gleichung des gesuchten Kegelschnitts lauten muß

$$(6) \quad a_{11}u_1^2 + a_{22}u_2^2 + a_{33}u_3^2 - 2\,a_{12}u_1u_2 - 2\,a_{23}u_2u_3 - 2\,a_{13}u_1u_3 = 0\,.$$

Denn setzen wir in derselben etwa $u_3 = 0$, d. h. suchen wir die Tangenten von der Ecke *III* aus, so ergibt sich Gleichung (5) und für die übrigen Ecken entsprechend.

Der Leser wird ohne Schwierigkeit feststellen, daß die Eigenschaft der drei Geradenpaare, einen Kegelschnitt zu umhüllen, durch die quadratische Transformation nicht zerstört wird. Daraus entsteht der bekannte Steinersche Satz:

Die drei Geradenpaare, die von den Ecken eines Dreiecks nach den 6 Schnittpunkten eines Kegelschnitts mit den Seiten des Dreiecks laufen, umhüllen einen Kegelschnitt.

Andererseits gehen von den 3 Ecken noch je zwei Tangenten an den Kegelschnitt K, die durch die Transformation in 3 Paare von Tangenten der Quartik aus den Doppelpunkten übergehen. Wir erhalten so den weiteren Satz:

Die 6 Tangenten, die von den Doppelpunkten einer rationalen Quartik an die Kurve gelegt werden können, berühren einen Kegelschnitt.

Beisp. Die Quartik mit 3 Spitzen hat die allgemeine Gleichung

$$\varkappa^2 \mu^2 x_1^2 x_3^2 + \lambda^2 \mu^2 x_2^2 x_3^2 + \varkappa^2 \lambda^2 x_1^2 x_2^2 - 2\varkappa^2 \lambda \mu x_1^2 x_2 x_3 + 2\varkappa \lambda^2 \mu x_1 x_2^2 x_3 + 2\varkappa \lambda \mu^2 x_1 x_2 x_3^2 = 0 .$$

Kegelschnitt (6) reduziert sich auf einen doppeltzählenden Punkt mit der Gleichung $(u_1/\varkappa - u_2/\lambda - u_3/\mu)^2 = 0$. Die Spitzentangenten sind

$$\varkappa x_1 + \lambda x_2 = 0 , \quad \varkappa x_1 + \mu x_3 = 0 , \quad \lambda x_2 - \mu x_3 = 0$$

und zeigen durch ihre Gleichungen direkt, daß sie durch einen Punkt laufen. Der Kegelschnitt K berührt die drei Koordinatenseiten. Es ist in der Tat auch ein bekannter Satz, daß die Verbindungslinien der Berührungspunkte mit den Gegenecken durch einen Punkt gehen. Die Gleichung der Quartik bringt man ohne Schwierigkeit auf die einfache Form

$$(\varkappa x_1)^{-\frac{1}{2}} + (\lambda x_2)^{-\frac{1}{2}} + (\mu x_3)^{-\frac{1}{2}} = 0 .$$

Transformiert man diese Gleichung, so ergibt sich

$$\left(\frac{x_1}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{x_2}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{x_3}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} = 0 ,$$

d. i. die Gleichung des erwähnten Kegelschnittes. Ist das Koordinatendreieck gleichseitig und K der eingeschriebene Kreis, so wird die entstehende Kurve dreiachsig-symmetrisch und ist mit der sogenannten »STEINERschen Hypozykloide« identisch.

76. Nach unseren allgemeinen PLÜCKERschen Formeln (S. 67) ergibt sich für eine Quartik mit 3 Doppelpunkten ($d = 3$, $r = 0$) die Zahl der Wendetangenten $\varrho = 24 - 6 \cdot 3 = 6$ und die Zahl der Doppeltangenten $\delta = \frac{1}{2}\{4 \cdot 2 \cdot 7 - 2(16 - 10) \cdot 6 + 12 \cdot 2\} = 4$. Die Bilder der Wendetangenten bzw. Doppeltangenten sind Kegelschnitte durch die Fundamentalpunkte, die den Kegelschnitt K oskulieren oder doppelt berühren. Wir erhalten somit indirekt den Satz:

Durch 3 Punkte gibt es an einen gegebenen Kegelschnitt 6 oskulierende und 4 doppelt berührende Kegelschnitte.

Die 4 Berührungssehnen der letzteren sind auch konstruktiv bestimmbar. Sie bilden ein vollständiges Vierseit, für welches das Fundamentaldreieck Diagonaldreieck ist. Und zwar

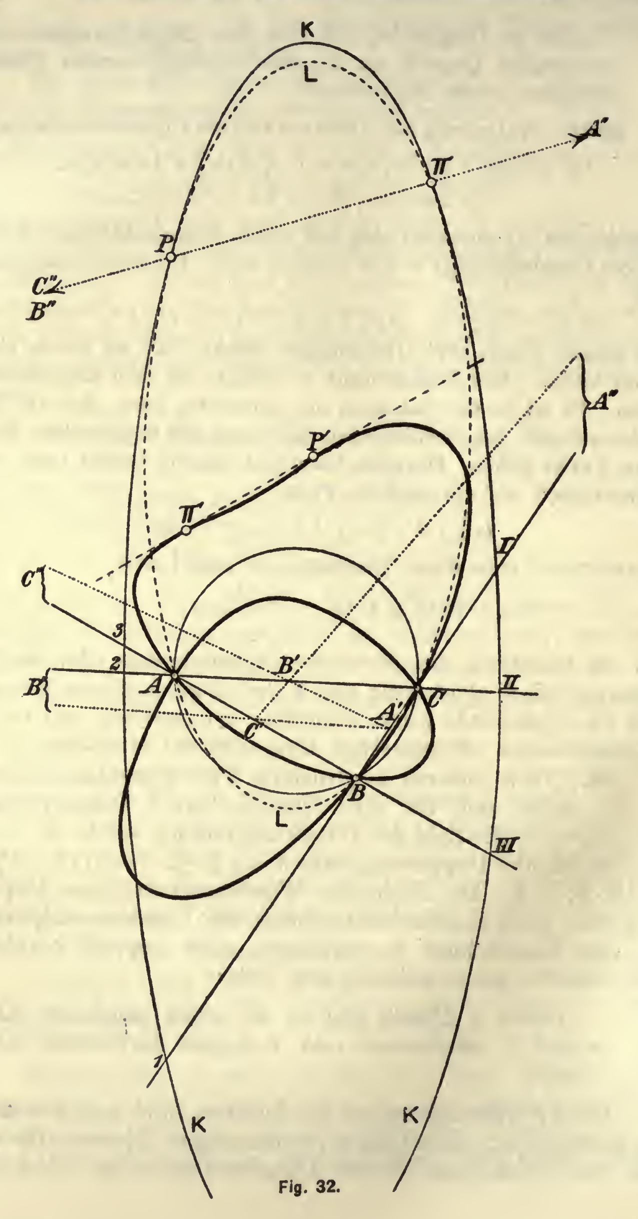


Fig. 32.

erhält man die Ecken desselben, indem man die Punkte sucht, die je auf einer Dreiecksseite zugleich in bezug auf die beiden Ecken und in bezug auf K harmonisch liegen. Denn sei eine solche Berührungssehne (s. Fig. 32) $P\Pi$ und A'' der Punkt, in dem sie die Seite BC trifft, so ist die Polare von A'' in bezug auf alle Kegelschnitte, die K in P und Π berühren, dieselbe und geht durch den Punkt A' von BC, der zu A'' harmonisch liegt in bezug auf den Kegelschnitt K und den berührenden Kegelschnitt L, der durch B und C geht. A' und A'' müssen also die Doppelpunkte der Involution sein, die auf BC durch alle in P und Π berührenden Kegelschnitte ausgeschnitten wird. Die Involution ist aber durch die Ecken B, C und das Punktepaar $(1, I)$, in dem K die Gerade BC schneidet, bestimmt und ihre Doppelpunkte nach einer der vielen Methoden (s. etwa DOEHLEMANN, *Projektive Geometrie*, Sammlung Göschen Nr. 72, 2. Aufl. § 18, S. 87) konstruierbar. Setzt man diese Betrachtung auf die anderen Dreiecksseiten fort, so gelangt man zu unserer Behauptung. Wenn, wie in Fig. 32, alle 4 Berührungssehnen den Kegelschnitt K reell schneiden, so sind alle 4 Doppeltangenten der Quartik reell und eigentliche (nicht isolierte) Doppeltangenten. Sie können aber, je nach der Lage von K, in bezug auf das $\triangle ABC$ auch sämtlich oder teilweise isoliert, sowie sämtlich oder zu zweien imaginär sein.

77. Bezeichnet man die Gleichungen der 4 Doppeltangenten symbolisch mit $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$, $T_4 = 0$, so stellt

$$T_1^{\frac{1}{2}} + T_2^{\frac{1}{2}} + T_3^{\frac{1}{2}} + T_4^{\frac{1}{2}} = 0$$

eine Quartik mit diesen 4 Geraden als Doppeltangenten vor. Denn wenn wir quadrieren, so erhalten wir

$$T_1 + T_2 + 2\sqrt{T_1 T_2} = T_3 + T_4 + 2\sqrt{T_3 T_4}$$

und hieraus

$$[(T_1 - T_3) + (T_2 - T_4)]^2 = 4\left(T_1 T_2 + T_3 T_4 - 2\sqrt{T_1 T_2 T_3 T_4}\right),$$

woraus die rationale Form

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \{[(T_1 - T_3) + (T_2 - T_4)]^2 - 4(T_1 T_2 + T_3 T_4)\}^2 \\ \qquad\qquad = 64\, T_1 T_2 T_3 T_4 , \end{array} \right.$$

oder ausgerechnet

$$(7^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} \{T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 + T_4^2 - 2\,T_1 T_2 - 2\,T_1 T_3 - 2\,T_1 T_4 \\ \quad - 2\,T_2 T_3 - 2\,T_2 T_4 - 2\,T_3 T_4\}^2 = 64\, T_1 T_2 T_3 T_4 \end{array} \right.$$

resultiert. Aus dieser Form ist ersichtlich, daß jede Gerade $T_i = 0$ dort die Kurve berührt, wo der durch die geschweifte Klammer dargestellte Kegelschnitt sie schneidet.

Die Kurve (7) enthält aber auch 3 Doppelpunkte. Wir erhalten durch eine kleine Umformung die Gleichung

$$(7^\dagger)\quad \begin{cases} [(T_1 - T_3) + (T_2 - T_4)]^4 - 8\,[(T_1 - T_3) + (T_2 - T_4)]^2 \\ \cdot (T_1 T_2 + T_3 T_4) + 16\,[(T_1 - T_3) T_2 + (T_2 - T_4) T_3]^2 = 0. \end{cases}$$

In derselben kommen nur Glieder vor, die entweder $(T_1 - T_3)^2$ oder $(T_1 - T_3)(T_2 - T_4)$ oder $(T_2 - T_4)^2$ enthalten. Nach Nr. 22, Beisp. 2 ist daraus ersichtlich, daß der Punkt $T_1 - T_3 = 0$, $T_2 - T_4 = 0$ Doppelpunkt ist. Durch Variieren der Indizes erkennen wir ebenso die beiden anderen Doppelpunkte $T_1 - T_2 = 0$, $T_3 - T_4 = 0$ und $T_1 - T_4 = 0$, $T_2 - T_3 = 0$, und wir können den Satz aussprechen:

Die 8 Berührungspunkte der 4 Doppeltangenten einer rationalen Quartik liegen auf einem Kegelschnitt.

Die Eigenschaften der Wendepunkte liegen tiefer. Es existiert für die allgemeine Quartik wohl eine ziemlich vollständige Theorie der (28) Doppeltangenten, während von den (24) Wendepunkten noch sehr wenig bekannt ist. Bei den rationalen Quartiken ist das Verhältnis etwas besser. Wir verweisen besonders wieder auf A. v. Brills Arbeit[43]) und erwähnen nur den Satz, daß auch die 6 Wendepunkte einer rationalen Quartik auf einem Kegelschnitt liegen[60]), müssen aber auf den Beweis verzichten.

§ 37. Die verschiedenen Typen der rationalen Quartiken mit getrennten Doppelpunkten. Zusammenrücken zweier Fundamentalpunkte.

78. Um die verschiedenen möglichen Typen der rationalen Quartiken zu erhalten, ist es gut, einen bestimmten

[60]) Dieser Satz wurde zuerst von J. Grassmann entdeckt und in der Dissertation *„Zur Theorie der Wendepunkte etc."* (Berlin 1875) veröffentlicht. Der dort aufgestellte Satz, daß jeder Kegelschnitt durch 5 Wendepunkte einer allgemeinen Quartik noch 3 andere Wendepunkte enthalte, ist aber falsch. Siehe F. Klein, *„Über eine neue Art von Riemannschen Flächen, 2. Mttlg."*, Math. Ann. **10**, 1876, S. 496.

Kegelschnitt, etwa einen Kreis, mit allen möglichen Lagen des Grunddreiecks in Beziehung zu bringen. Man findet dann, wenn man zwischen den 3 Arten der Doppelpunkte keine Unterscheidung macht, hauptsächlich 5 verschiedene Fälle, die sich durch die Anordnung der Schnittpunkte des Kreises K mit den Seiten des Grunddreiecks unterscheiden.

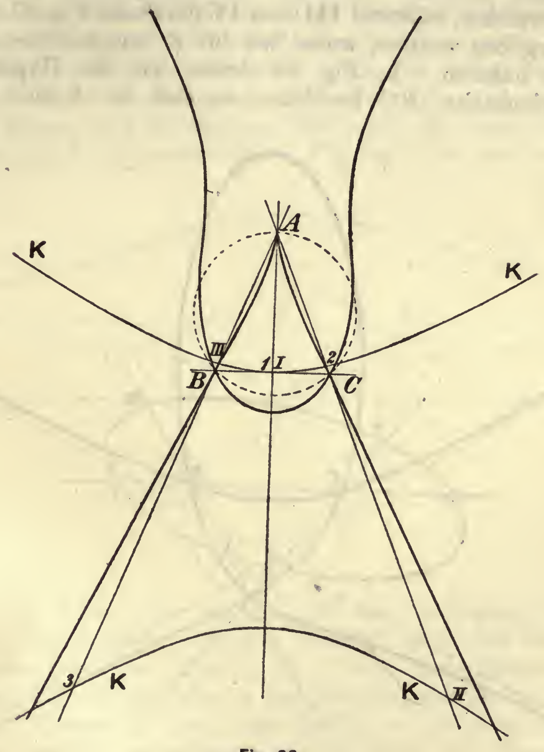


Fig. 33.

Bezeichnen wir mit *1, I*; *2, II*; *3, III* bez. die Schnittpunkte des Kreises mit den Dreiecksseiten, so gibt es folgende 5 Typen[60a]):

[60a]) Vgl. die von der Kgl. Technischen Hochschule München herausgegebenen Tafeln „*Rationale Kurven vierter Ordnung*" nebst der dazugehörigen Abhandlung von A. v. Brill. Dort ist auch eine Angabe über die Asymptoten gemacht.

I.	**II.**	**III.**
1 I 2 II 3 III	*1 I 2 3 III II*	*1 I 2 3 II III*

IV.	**V.**
1 2 3 I III II	*1 2 3 I II III*,

von denen **I** und **V** bereits in den Fig. 31 und 32 dargestellt wurden, während **III** und **IV** durch die Fig. 33 und 34 wiedergegeben werden, wobei wir für K verschiedene Kegelschnitte nahmen. In Fig. 33 ließen wir die Hyperbel K die Dreieckseite BC berühren, so daß in A eine Spitze

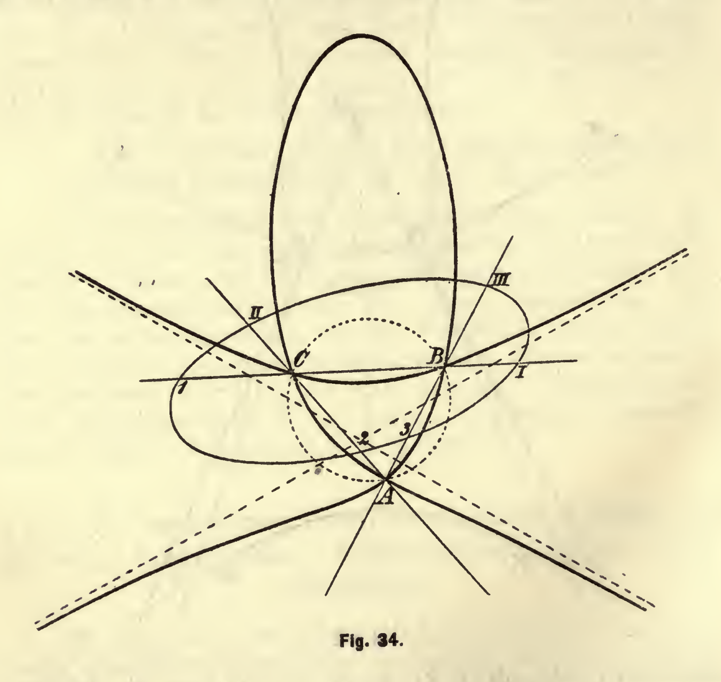


Fig. 34.

auftritt. So vermittelt die Kurve leicht den Übergang zu der in Nr. 63 diskutierten. Die Form **II** (Fig. 55) wird uns später (Nr. 133) noch beschäftigen.

78a. In all diesen Fällen ergeben sich Berührungsknoten (immer in Verbindung mit einem Doppelpunkte irgend welcher Art), wenn wir 2 Ecken (etwa B und C) und

Seiten (AB und AC) des Fundamentaldreiecks zusammenfallen lassen. Die Konstruktion bleibt genau so ausführbar wie im allgemeinen Falle. Der Berührungsknoten kann reelle Äste haben oder auch isoliert sein. Dies hängt davon ab, ob K die dritte Dreiecksseite BC (die Tangente des Berührungsknotens) reell oder imaginär schneidet. Zwischen beiden Extremen liegt der Fall der Berührung. Dieser entspricht der Schnabelspitze. Vom Berührungsknoten gehen 2 Tangenten an K, die reell oder imaginär sind, je nachdem die Berührung von innen oder von außen stattfindet. Im Fall der Schnabelspitze fällt eine mit BC zusammen. Die Formen und Übergänge wird sich der Leser leicht an einigen rasch zu entwerfenden Figuren klar machen.

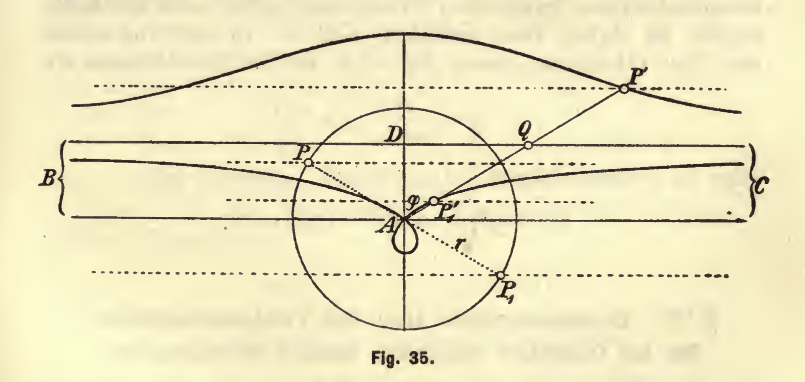


Fig. 35.

Wir wollen nur einen Fall, der besonderes Interesse bietet, konstruktiv verfolgen, nämlich den, daß die beiden zusammengefallenen Ecken B, C im Unendlichen liegen, während die dritte Ecke A das Zentrum des zu transformierenden Kreises K mit dem Radius r ist (Fig. 35). Wir haben den Fall gezeichnet, wo die Seite BC diesen Kreis reell schneidet, der dritte Doppelpunkt also ein Knoten ist. Man erhält zu einem Punkte P den entsprechenden P', indem man den $\sphericalangle PAB$ an AC trägt und zu BC eine Parallele zieht in dem Abstande, den P von AC hat, aber im entgegengesetzten Sinne. Schneidet der transformierte Strahl AP' die Fundamentalgerade BC in Q, so ist offenbar immer $QP' = r$. Auf demselben Strahl AP liegt noch

ein zweiter Punkt P_1, der in entsprechender Weise transformiert P_1' gibt. Wir können daher die Konstruktion dieser Kurve einfacher so ausdrücken: *Gegeben ein Punkt A als Pol und eine Gerade BC als Basis, sowie eine Strecke r als Zwischenstück; man ziehe durch A einen beliebigen Strahl, der die Basis in Q schneidet, und trage auf demselben von Q aus nach beiden Seiten $QP' = QP_1' = r$ ab, so ist der Ort der Punkte P' (bez. P_1') unsere Kurve.* Dies ist die seit alter Zeit bekannte »Konchoide« (=Muschellinie) des NIKOMEDES, die man sich leicht auch mit Spitze oder isoliertem Punkt konstruiert.

Eine einfache Überlegung zeigt, daß ganz allgemein, wenn K ein Kreis ist, die resultierende Quartik durch die unendlichfernen, imaginären Kreispunkte geht; auch die Konchoide ist daher eine zirkulare Kurve. In der Tat erhält man ihre Gleichung, wenn $AD = a$, in Polarkoordinaten als

$$\varrho = \frac{a}{\cos\varphi} \pm r \text{ [61]},$$

oder in rechtwinkligen $[\varrho^2 = x^2 + y^2, \ \varrho\cos\varphi = y]$

$$(x^2 + y^2)(y - a)^2 - r^2 y^2 = 0.$$

...

§ 38. Zusammenrücken aller drei Fundamentalpunkte. Die bei Quartiken möglichen höheren Singularitäten.

79. Wir müssen noch den Fall ins Auge fassen, daß alle drei Fundamentalpunkte zusammenrücken. Dies kann jedoch, soll überhaupt eine quadratische Transformation möglich sein, nur so stattfinden, daß die drei Punkte A, B, C auf dem endlich bleibenden Umkreis konsekutiv werden. Das Resultat der Transformation eines Kegelschnittes K ist dann auch nicht der gewöhnliche dreifache Punkt in keiner seiner vier Formen, sondern ein sogenannter »Oskulationsknoten«.

---

[61]) Das doppelte Zeichen bei r würde sich durch eine etwas modifizierte Definition der Polarkoordinaten vermeiden lassen. Siehe bei LORIA (L. V.) die Note I (S. 714) oder in Period. mat. insegn. sec. **15** (1899) die Abhandlung desselben Verfassers: *„Osservazioni sopra le coordinate polari“*.

Die Konstruktion in diesem Falle läßt sich nach v. BRILL durch einen Grenzübergang aus der für ein endliches Fundamentaldreieck herleiten, am besten, indem man sich dasselbe gleichschenklig (mit den Basiswinkeln φ) auf dem festen Kreis mit dem Radius r denkt und die Grundlinie $AC = 2d$ gegen 0 konvergieren läßt. Verbindet man P und P' (s. Fig. 36) mit A und C und bezeichnen wir AP und AP' mit ϱ bez. ϱ', so ist, wenn der Winkel an P' α genannt wird, der an P gleich $\alpha + 2\varphi$. Sei nun δ der Neigungswinkel, den CP in der Grenze mit AC bildet, so ist $(-\delta)$ der Winkel, den CP' mit AC bildet. Da $\sin\varphi = d/2r$, so ergibt sich

$$\lim \varphi = \lim d/2r\,.$$

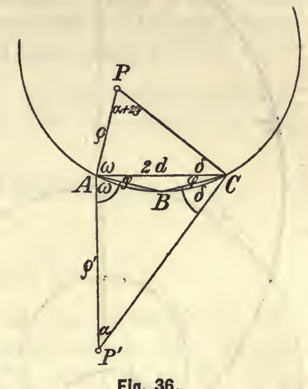


Fig. 36.

Denkt man sich nun von A auf CP bez. CP' die Lote gefällt, so ergeben sich weiter die beiden Gleichungen

$$\lim(\varrho' \sin\alpha) = \lim(2\,d \sin\delta)$$

und

$$\lim[\varrho \sin(\alpha + 2\,\varphi)] = \lim(2\,d \sin\delta)\,.$$

Führen wir den Grenzübergang aus, so erhalten wir die beiden Gleichungen

$$\varrho'\alpha = 2\,d \sin\delta \quad \text{und} \quad \varrho\,\alpha = 2\,d \sin\delta - \varrho\frac{d}{r}\,,$$

aus denen durch Division die Proportion

$$\varrho' : \varrho = 2\,r \sin\delta : (2\,r \sin\delta - \varrho)$$

hervorgeht, die man zur Konstruktion von ϱ' bequemer in die Form bringt

$$\varrho' : \varrho = 2\,r : \left(2\,r - \frac{\varrho}{\sin\delta}\right).$$

Die äußere Form des Oskulationsknotens ist die eines sehr flachen Berührungsknotens. Nur ist natürlich der Verlauf

der Zweige ein anderer, wie aus Fig. 37, in der wir einen Fall mit innerer Berührung dargestellt haben, hervorgeht.

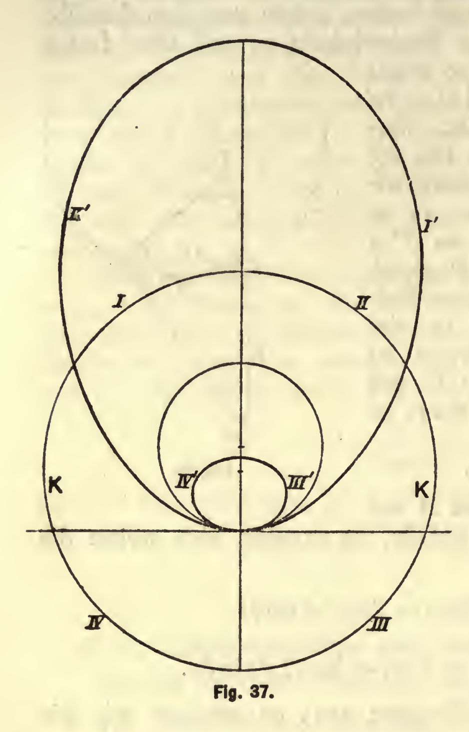


Fig. 37.

Man muß die Kurve in der Reihenfolge der Züge I', II', III', IV', die den Teilen I, II, III, IV von K entsprechen, durchlaufen.

Auch der Oskulationsknoten kann isoliert sein, wenn K die singuläre Tangente AC nicht schneidet. Als Übergang erscheint wieder, wenn K die singuläre Tangente berührt, eine Form mit Spitze, die sog. »Berührungsknotenspitze«, vom Charakter der Schnabelspitze.

80. Hier scheint uns der passende Ort zu sein, auch die allgemeinen Gleichungsformen für die verschiedenen bei Quartiken möglichen höheren Singularitäten anzugeben, von denen wir bislang nur Beispiele bez. Konstruktionen kennen lernten.

I. Der **Berührungsknoten** tritt auf, wenn die Kurvengleichung die Form hat

$$(yz - mx^2)(yz - m'x^2)$$
$$= 2cxy^2z + fx^3y + gx^2y^2 + dy^3z + hxy^3 + ly^4,$$

wo, wegen der Entwicklungen, wieder x, y, z für x_1, x_2, x_3 gesetzt sind. Nach Nr. 58 beginnen die beiden letzteren mit $y = mx^2$ und $y = m'x^2$ und es ist demnach notwendig $m \neq m'$. Die Bedingung für einen dritten Doppelpunkt etwa in der Ecke $x = 0$, $z = 0$ ist $d = h = l = 0$.

II. Die **Schnabelspitze** tritt auf für $m = m'$, wie in Nr. 78 erläutert. Ihre Entwicklung gibt die Anfangsglieder (s. Nr. 61) $y = mx^2 \pm nx^{\frac{5}{2}}$, wo notwendig $n \equiv \sqrt{m(f+2cm)} \neq 0$. Die Bedingung für einen weiteren Doppelpunkt ist dieselbe wie vorhin. Man kann jedoch in beiden Fällen $z = 0$ noch so wählen, daß die Tangenten dieses dritten Doppelpunktes $z^2 - gx^2 = 0$ werden; dann verschwindet auch c.

III. Der **Oskulationsknoten.** Ist (m immer $\neq 0$ vorausgesetzt) $f + 2cm = 0$, so kann die Gleichung in die Form gebracht werden

$$(yz - mx^2 - cxy)^2 = dy^3z + kx^2y^2 + hy^3x + ly^4.$$

Die Entwicklung lautet

$$y = mx^2 + mx^3\left(c \pm \sqrt{md+k}\right) + \dots .$$

Für die Existenz der Singularität ist also notwendige Bedingung $md + k \neq 0$. c kann verschwinden, nur dürfen dann nicht d, h, l alle gleichzeitig 0 sein. Eine Erweiterung der Betrachtung, die wir beim Berührungsknoten (Nr. 71, Beisp. 1) angestellt haben, zeigt, daß die Singularität zu sich selbst reziprok ist. Daher sind die Äquivalenzzahlen $d = 3$, $r = 0$, $\delta = 3$, $\varrho = 0$. Die Kurve hat noch eine Doppeltangente und wie jede rationale Quartik 6 Wendetangenten.

Beisp. 1. $(y - x^2)^2 = x^2y^2 - y^4$, vom Typus der Fig. 20 für $\lambda = +1$.

Beisp. 2. $\left(y - x^2 - \frac{y^2}{2}\right)\left(y - x^2 - \frac{y^2}{3}\right) = Ax^2y^2$. Für $A > 0$ vom Typus der Fig. 37. Für $A < 0$ ist der Oskulationsknoten isoliert. Je nachdem $|A| > \frac{1}{6}$, $= \frac{1}{6}$, $< \frac{1}{6}$, ist die Doppeltangente eigentlich, Flachpunktstangente oder isoliert.

IV. Die **Berührungsknotenspitze** entsteht aus dem vorigen Fall für $md + k = 0$. Man kann dann die Gleichung schreiben

$$(yz - mx^2 - cxy - ey^2)^2 = y^3(Ax + By)$$

und die Entwicklung lautet

$$y = mx^2 + cmx^3 \pm \sqrt{Am} \cdot x^{\frac{7}{2}} + \dots .$$

Bedingung ist $A \neq 0$. Wäre $A = 0$, so zerfiele die Quartik. Die vorliegende Singularität ist also für Quartiken die höchste.

Die Berührungsknotenspitze ist ebenfalls zu sich selbst reziprok und es sind die Äquivalenzzahlen $d = 2$, $r = 1$, $\delta = 2$, $\varrho = 1$. Wegen der Spitze hat die Kurve keine Doppeltangente mehr und nur noch 3 Wendetangenten.

Beisp. 1. $(y - x^2)^2 = x y^3 - y^4$. Typus der Kurve *5* von Fig. 24 (ohne isolierten Punkt).

Beisp. 2. $(y - x^2 - 3 y^2)^2 = y^3 (x + 4 y)$. Typus der Kurve *1* von Fig. 24.

2. Transformation durch reziproke Radien.

§ 39. Übergang auf ein imaginäres Fundamentaldreieck.

81. In allen betrachteten Fällen war bis jetzt das Koordinatendreieck reell gewesen. Es besteht aber die Möglichkeit, daß zwei Seiten desselben konjugiert imaginär sind. Dann sind nur eine Ecke und die Gegenseite reell. Die durch Transformation in bezug auf ein solches Dreieck aus einem Kegelschnitt hervorgegangene Quartik hat zwei konjugiert imaginäre Doppelpunkte, die man durch Projektion (lineare Transformation) immer in die unendlichfernen Kreispunkte legen kann. Wir betrachten deshalb für den vorliegenden Zweck $x_3 = 0$ als unendlichferne Gerade und legen durch die reelle Ecke des Koordinatendreiecks irgend ein Achsenkreuz mit den reellen Variablen ξ und η: Dann hat man

$$x_1 : x_2 : x_3 = (\xi + i \eta) : (\xi - i \eta) : 1 ,$$

woraus man durch quadratische Transformation erhält

$$x_1' : x_2' : x_3' = \frac{1}{\xi + i\eta} : \frac{1}{\xi - i\eta} : 1 = \frac{\xi - i\eta}{\xi^2 + \eta^2} : \frac{\xi + i\eta}{\xi^2 + \eta^2} : 1 .$$

Setzen wir dies $= (\xi' + i\eta') : (\xi' - i\eta') : 1$ (wobei wir die ξ', η' auf dasselbe Koordinatensystem beziehen, wie die ξ, η), so haben wir zwischen den reellen Variablen ξ, η und ξ', η' die Beziehung

$$\xi' = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} \qquad \eta' = -\frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} .$$

Hieraus ergibt sich

$$\xi'^2 + \eta'^2 = \frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \cdot \quad \frac{\xi'}{\eta'} = -\frac{\xi}{\eta}.$$

Nennen wir den Anfangspunkt O und setzen $OP = \varrho$, $OP' = \varrho'$, so sagen diese Gleichungen aus, daß immer $\varrho\varrho' = 1$ und daß OP' mit der ξ'-Achse denselben Winkel nach unten bildet, wie OP mit der ξ-Achse nach oben. Das letztere bedeutet geometrisch nur eine Spiegelung (Umklappung). Läßt man diese fallen und nimmt also auf dem Radiusvektor eines Punktes P denjenigen Punkt P' als entsprechenden, für welchen $\varrho \cdot \varrho' = 1$ ist, wo die Einheit durch das Quadrat einer Strecke r gegeben sein muß, so hat man die wichtige, seit langem bekannte und vielfach benutzte Inversion im engeren Sinne: »zirkulare Inversion« oder »Transformation durch reziproke Radien«. Nimmt man O im Zentrum eines Kreises vom Radius r, so erhält man zu einem Punkte P den inversen, indem man den konjugierten Punkt P' konstruiert.

Auf dieser Grundlage wird sich der Leser, auch wenn ihm die in Rede stehende Transformation noch nicht näher bekannt sein sollte, die wichtigsten Eigenschaften derselben selbst ableiten. Im übrigen verweisen wir wieder auf DOEHLEMANNS Darstellung. Es entspricht der unendlichfernen Geraden der Anfangspunkt (das Zentrum der Inversion), jeder allgemeinen Geraden ein Kreis durch das Zentrum, jedem Kreis aber wieder ein Kreis. Denn jeder Kreis geht durch zwei Koordinatenecken, die Inverse wird also $4 - 2 = 2^{\text{ter}}$ Ordnung und geht durch dieselben beiden Ecken. Einem allgemeinen Kegelschnitt K aber entspricht eine bizirkulare Quartik mit einem dritten reellen Doppelpunkt, der Knoten, Spitze oder isolierter Punkt ist, je nachdem K eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel. Eine Unterscheidung der beiden imaginären Doppelpunkte in den Kreispunkten in Knoten oder isolierte Punkte ist ja nicht möglich, doch können beide zu Spitzen werden, und zwar beide zugleich, was dann eintritt, wenn der invertierte Kegelschnitt die beiden nach den Kreispunkten laufenden Koordinatenseiten berührt, d. h. wenn das Inversionszentrum ein Brennpunkt des Kegelschnitts ist (s. S. 52).

§ 40. Die verschiedenen Formen der bizirkularen rationalen Quartiken. Beispiele.

82. Man erhält die verschiedenen Formen der bizirkularen rationalen Quartiken, wenn man den Inversionskreis fest annimmt und K alle möglichen Lagen und Formen in bezug auf diesen Kreis zuweist. So findet man 6 wesentlich verschiedene Typen, die sich in 3 Paare sondern, je nachdem K Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist. Jedes Paar

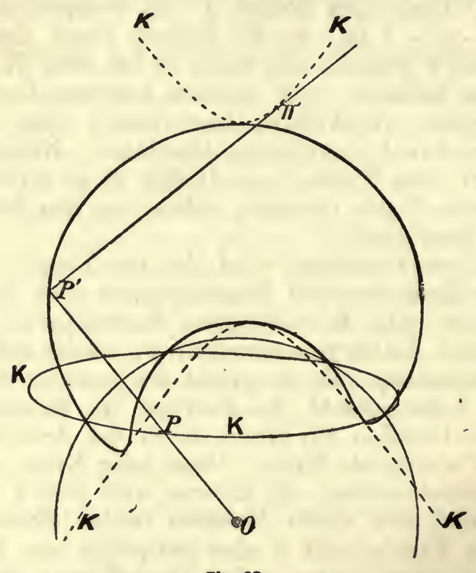


Fig. 38.

hat zwei Unterfälle, die davon abhängen, ob das Inversionszentrum in das Innere oder Äußere des Kegelschnittes K fällt. Der isolierte Punkt befindet sich dann innerhalb (s. in Beisp. 2 die leicht zu zeichnenden BOOTHschen Lemniskaten) oder außerhalb des geschlossenen Zweiges, wie bei der Kurve von Fig. 38, die Schleifen des Knotens liegen ineinander (s. unten die PASCALsche Schnecke) oder auseinander (BERNOULLIsche Lemniskate, Beisp. 2), die Spitze

ist gegen das Innere (Kardioide) oder Äußere des Zuges gerichtet (Fig. 39).

Zeichnet man zu dem gegebenen Kegelschnitt K den polarreziproken *K*, so daß also der Tangente in P der Pol Π entspricht (Fig. 38), so geht, da P und P' ebenfalls konjugierte Punkte in bezug auf den Inversionskreis sind, die Tangente von *K* in Π, das ist die Polare von P in bezug auf den Kreis, durch P' und es ist $\Pi P' \perp OP'$. Man erhält demnach all die in Rede stehenden Kurven auch,

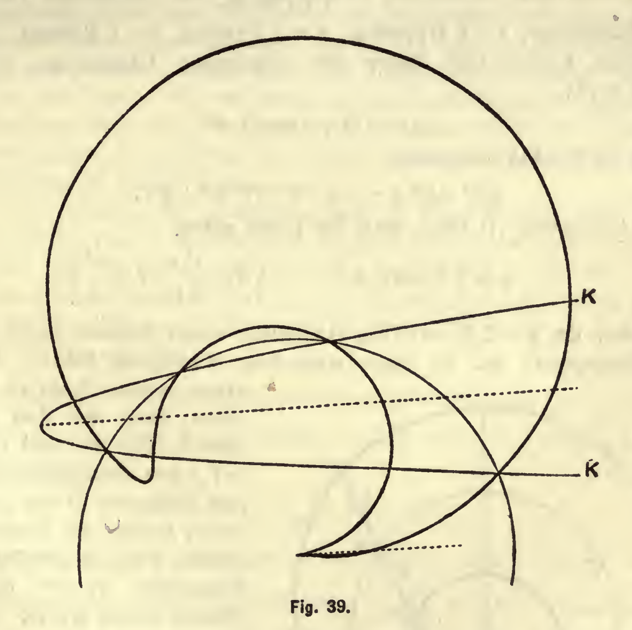


Fig. 39.

indem man von irgend einem Punkt O aus auf alle Tangenten eines Kegelschnittes *K* die Lote fällt. Ort der Fußpunkte dieser Lote, oder wie man sagt die »Fußpunktskurve« des Kegelschnitts *K* in bezug auf O ist eine bizirkulare rationale Quartik. Offenbar berührt diese den Kegelschnitt *K*, wo sie ihn schneidet (also viermal), wie dies die Fig. 38 auch anzeigt.

Für die analytische Behandlung der zirkularen Inversion ist es natürlich besonders zweckmäßig, wenn K in Polar-

koordinaten gegeben ist. Die folgenden Beispiele von bekannten speziellen Kurven, die zu dieser Kategorie gehören, werden dies des Näheren erläutern.

Beisp. 1. Die allgemeine Gleichung eines Kegelschnitts in bezug auf den Brennpunkt als Pol, wenn die Achse des Kegelschnitts Achse des Polarsystems ist, lautet (s. Simon, *Analytische Geometrie der Ebene,* S. S. VIII, S. 196)

$$\varrho' = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}$$

[p Parameter, $\varepsilon > 1$ Hyperbel, $\varepsilon = 1$ Parabel, $\varepsilon < 1$ Ellipse]. Die inverse Kurve hat daher die allgemeine Gleichung, wenn $\varrho \cdot \varrho' = r^2$:

$$\varrho p = (1 + \varepsilon \cos\varphi) \cdot r^2, \tag{1}$$

oder in Punktkoordinaten

$$[(x^2 + y^2) p - \varepsilon x r^2]^2 = r^4 (x^2 + y^2). \tag{2}$$

Der Gleichung (1) kann man die Form geben

$$\varrho = 2 R \cos\varphi + l \qquad \left[R = \frac{r^2 \varepsilon}{2p},\ l = \frac{r^2}{p}\right], \tag{3}$$

welche, da $\varrho = 2R\cos\varphi$ die Gleichung eines Kreises durch den Anfangspunkt ist, zu einer einfachen Erzeugung führt. *Man nehme einen Punkt O auf einem Kreis mit dem Radius R (Fig. 40) und trage auf jedem Radiusvektor OM vom Endpunkt M aus (nach beiden Seiten) die konstante Strecke l ab, so erfüllen die Endpunkte P, P' dieser Strecke unsere Kurve.* Dieselbe kann nach der angegebenen Erzeugung auch als Konchoide mit Kreisbasis betrachtet werden und heißt im allgemeinen Falle Pascalsche Schnecke. Sie hat einen Knoten, wenn wie in unserer Figur $l < 2R$ $(\varepsilon < 1)$, einen isolierten Punkt, wenn $l > 2R$ $(\varepsilon > 1)$ und heißt Kardioide (= Herzlinie), wenn sie für $l = 2R$ $(\varepsilon = 1)$ eine

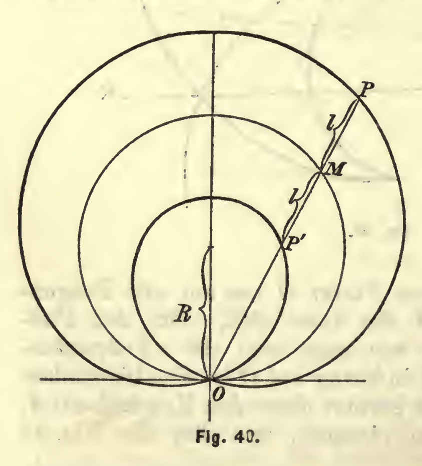


Fig. 40.

Spitze bekommt. Diese ist vom Typus der in Figur 4 und 4* benützten Grundkurve. All diese Kurven haben Spitzen in den Kreispunkten, die der Leser aus Gleichung (2) selbst nachweisen mag, sei es durch direkte Aufstellung der Tangentenpaare oder durch Zurücktransformieren auf das imaginäre Koordinatendreieck.

Die Polarreziproke jedes Kegelschnitts ist, wenn ein Brennpunkt desselben in den Mittelpunkt des Fundamentalkegelschnitts, hier des Inversionskreises fällt, ein Kreis. Denn durch diesen Mittelpunkt gehen zwei Tangenten an den Kegelschnitt nach den unendlich fernen Kreispunkten, denen als Pole die Kreispunkte selbst entsprechen. Daher geht die Polarreziproke durch diese und ist ein Kreis. Wir erkennen so die PASCALschen Schnecken als Fußpunktskurven des Kreises und werden leicht die 3 Fälle unterscheiden, je nachdem der Punkt O in, auf oder außerhalb des Kreises zu liegen kommt.

Wir können nur andeuten, daß all diese Kurven auch als Epizykloiden (durch Rollen eines Kreises auf einem andern) sich ergeben. Es sei auch noch bemerkt, daß die Kardioide mit der STEINERschen Hypozykloide (S. 143) projektivisch identisch ist. Näheres über diese und die Kardioide findet der Leser bei SIMON, Abschnitt XI und XIII.

Beisp. 2. Ein Zentralkegelschnitt mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ werde vom Zentrum aus invertiert. Man erhält eine Kurve mit der Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 = \frac{r^4}{a^2 b^2} (b^2 x^2 \pm a^2 y^2) , \tag{4}$$

die im allgemeinen BOOTHsche Lemniskate heißt. Sie ist die Fußpunktskurve eines Kegelschnitts $\frac{x^2}{\alpha^2} \pm \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ mit demselben Mittelpunkt und in bezug auf diesen Mittelpunkt. Denn wenn wir die Tangente mit Benutzung der exzentrischen Anomalie u in der gemischten Form schreiben

$$\frac{x \cos u}{\alpha} + \frac{y \sin u}{\beta} = 1 , \tag{5}$$

wo nur für die Hyperbel $i\beta$ statt β zu setzen wäre, so hat das Lot auf dieselbe von O aus die Gleichung

$$\frac{x \sin u}{\beta} - \frac{y \cos u}{\alpha} = 0 . \tag{6}$$

Hieraus ergibt sich $\operatorname{tg} u = \beta y / \alpha x$. Drückt man nun $\cos u$ und $\sin u$ durch $\operatorname{tg} u$ aus und setzt diese Ausdrücke in (5) ein, so kommt

$$(7) \qquad (x^2 + y^2)^2 = \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 ,$$

woraus im Vergleich mit (4) $\alpha = r^2/a$, $\beta = r^2/b$. In der Tat ist $a^2 x^2 \pm b^2 y^2 = r^4$ der zu dem gegebenen polarreziproke Kegelschnitt in bezug auf den Inversionskreis, wovon sich der Leser vermittels der Methoden von § 10 u. § 11 leicht selbst überzeugt.

Unter diesen Boothschen Lemniskaten, auf deren metrische Erzeugung wir nicht eingehen können (s. Loria, S. 126) ist eine sehr bemerkenswerte und bekannte Kurve, die entsteht, wenn als Grundkegelschnitt die gleichseitige Hyperbel mit $a^2 = b^2 = r^4/2c^2$ genommen wird. Ihre Gleichung wird

$$(8) \qquad (x^2 + y^2)^2 = 2c^2 (x^2 - y^2) ,$$

und die Kurve heißt Bernoullische Lemniskate[61a]). Sie hat in O einen Knoten mit zueinander senkrechten Tangenten $x \pm y = 0$, deren jede die Kurve in vier zusammenfallenden Punkten trifft. Daraus ist zu schließen, daß jeder Zweig des Knotens im Anfangspunkte eine Inflexion hat. Der Anfangspunkt ist ein »Inflexionsknoten«. Führt man $x + iy = \xi/\zeta$, $x - iy = \eta/\zeta$ ein, so wird die Gleichung der Kurve

$$(8^*) \qquad \xi^2 \eta^2 = c^2 (\xi^2 + \eta^2) \zeta^2 .$$

Diese Form zeigt, daß die Kurve triangulär symmetrisch ist. Auch die Kreispunkte sind also Inflexionsknoten. Die Tangenten in diesen Punkten (imaginäre Asymptoten) haben die Gleichungen

$$\xi \pm c\zeta \equiv x + iy \pm c = 0; \quad \eta \pm c\zeta \equiv x - iy \pm c = 0 .$$

Sie schneiden sich in zwei reellen Asymptotenpunkten mit den Koordinaten $x = \pm c$, $y = 0$, die für die Kurve außerordentliche Brennpunkte sind und eine ähnliche Eigenschaft, wie die Brennpunkte der Kegelschnitte haben. *Verbindet man nämlich einen Punkt x, y der Kurve mit diesen beiden Punkten,* so sind die beiden Entfernungen

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

und *es ist das* ***Produkt*** *der beiden Radienvektoren* ***konstant.*** Dasselbe ist

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2 x^2} = \sqrt{\underbrace{(x^2 + y^2)^2 - 2c^2 (x^2 - y^2)}_{0} + c^4} = c^2 .$$

[61a]) Das Wort »Lemniskate« kommt von λημνίσκος = Band, Schleife (frz. nœud de ruban).

Viel behandelt sind auch die Kurven, für die dieses Produkt einen anderen konstanten Wert, etwa a^2 hat. In dem System dieser Kurven, der sogenannten »Cassinischen Linien«, ist in Fig. 41 auch die Lemniskate (*2*) dargestellt. Die Cassinischen Linien haben die Gleichung

$$(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)+c^4-a^4=0$$

und sind zweiteilig (*1*) oder einteilig (*3*), je nachdem $a<c$ oder $a>c$. Für $a=c\sqrt{2}$ tritt die Form *4* mit 2 Flachpunkten auf. Die übrige Diskussion überlassen wir dem Leser (s. Simon, Abschnitt XIV). Wir bemerken nur noch, daß die Cassinischen

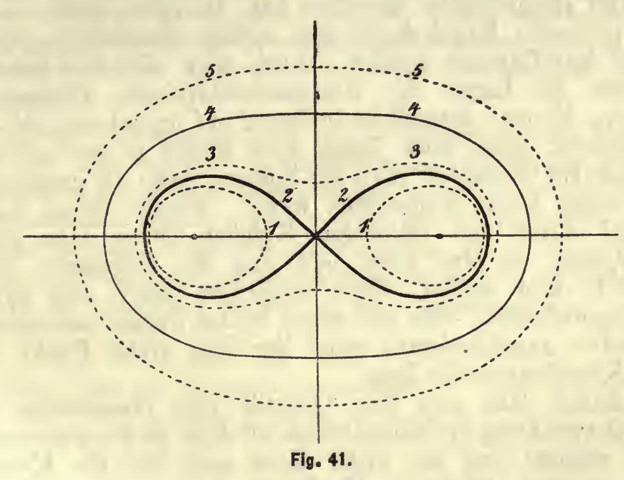


Fig. 41.

Linien nicht mehr rational sind, während die Kreispunkte für alle Formen Inflexionsknoten bleiben.

Durch imaginäre Projektion (lineare Transformation mit imaginären Koeffizienten) kann die Lemniskate in eine Kurve mit zwei reellen Inflexionsknoten verwandelt werden. Der dritte ist aber dann notwendig isoliert und die Kurve kann sich im Endlichen nicht schließen. Ein Beispiel dafür ist die in Nr. 26, Beisp. erwähnte Kreuzkurve.

3. Auflösung höherer Singularitäten.

§ 41. Allgemeine Bemerkungen über birationale Transformationen.

83. Wenn wir die Betrachtungen, die wir bisher über die quadratische Transformation im allgemeinen anstellten,

umkehren, so können wir sagen, es ist möglich, jede Quartik vom Geschlechte 0, sofern ihre Doppelpunkte entweder getrennt oder zu zwei oder drei konsekutiv sind, durch eine einzige Transformation in einen Kegelschnitt, durch eine weitere in eine Gerade zu transformieren. Ausgeschlossen waren nur die Quartiken mit gewöhnlichem dreifachen Punkt. Doch wissen wir (vgl. die Bem. am Schlusse von Nr. 73) diese in eine Kubik mit Doppelpunkt zu transformieren; diese kann aber durch eine weitere Transformation vermittels eines Dreiecks, das zwei Ecken auf der Kurve, die dritte im Doppelpunkt derselben hat, in einen durch eine Ecke gehenden Kegelschnitt und mithin ebenfalls in eine Gerade transformiert werden. Auch wird sich der Leser unschwer die Lagen des Fundamentaldreiecks vergegenwärtigen, die man demselben in bezug auf irgend eine rationale Quartik geben muß, damit diese wieder in eine solche von anderem Charakter, etwa mit Spitzen, wenn die gegebene nur Knoten hatte, übergeführt werde. Ebenso lassen sich die drei Arten von rationalen Kubiken, wenn man den Doppelpunkt in eine Ecke legt und die Gegenseite die Kurve in drei reellen, einem einfachen reellen und zwei zusammenfallenden, oder nur einem reellen Punkte schneidet, ineinander transformieren, wenn der eine reelle Punkt in einer Koordinatenecke liegt.

Ähnlich läßt sich jede Quartik vom Geschlechte 1, d. h. mit zwei Doppelpunkten, indem wir diese als Koordinatenecken nehmen und die dritte Ecke auch auf die Kurve legen, in eine allgemeine Kubik transformieren, und jede solche geht, wenn alle Koordinatenecken auf derselben liegen, durch quadratische Transformation wieder in eine ebensolche über.

All diese Tatsachen sind nur Belege für den allgemeinen Satz der Nr. 45, daß das Geschlecht einer Kurve bei rationaler (eindeutiger) Transformation erhalten bleibt. Im folgenden wollen wir noch zeigen, wie auch jede höhere Singularität durch quadratische Transformation »aufgelöst« werden kann. Das Auftreten von gewöhnlichen vielfachen Punkten mit getrennten Tangenten in den Koordinatenecken kann bei Kurven von höherer als der 4. Ordg. dabei freilich nicht vermieden werden. Was wir also erreichen wollen, ist zu zeigen, daß jede mit irgendwelchen Singularitäten

behaftete Kurve in eine solche von gleichem Geschlecht mit nur gewöhnlichen vielfachen Punkten übergeführt werden kann.

Es besteht jedoch die Möglichkeit, auch diese Kurve noch weiter zu transformieren, so daß sie ein Minimum der Ordnung erreicht und nur einfache Doppelpunkte besitzt. Hierzu ist aber eine noch allgemeinere Gattung von birationalen Transformationen nötig, auf deren Behandlung wir verzichten müssen, nachdem wir schon von den CREMONAschen Transformationen nur eine Untergattung besprochen haben. Diese allgemeinen birationalen Transformationen vermitteln eine eindeutige Beziehung nur zwischen den in Rede stehenden beiden Kurven, nicht aber zwischen den ganzen Ebenen[61b]).

Beisp. Wir möchten doch auch ein Beispiel geben, wie man bei zwei auf dasselbe Koordinatendreieck bezogenen Kurven gleichen Geschlechts von gegebenen Gleichungen eine CREMONAsche Transformation angeben kann, durch die sie ineinander übergeführt werden. Seien dies zwei Kubiken, für die ja die Möglichkeit einer solchen Überführung feststeht, die eine mit isoliertem Punkt, die andere mit Spitze, von den Gleichungen

$$z(y^2+x^2)=x^3 \quad \text{und} \quad z'y'^2=x'^3,$$

so geben diese die Parameterdarstellungen

$$x:y:z=(1+\lambda^2):\lambda(1+\lambda^2):1$$

und

$$x':y':z'=\mu^2:\mu^3:1.$$

Lassen wir nun der Einfachheit wegen etwa die Punkte $\mu=\lambda$ einander entsprechen, so ergibt sich

$$\frac{y}{x}=\frac{y'}{x'} \quad \text{und} \quad \frac{z}{x}=\frac{1}{1+\lambda^2}=\frac{z'}{x'+z'},$$

woraus man erhält:

$$x:y:z=[x'(x'+z')]:[y'(x'+z')]:x'z'.$$

[61b]) Ein Beispiel für eine solche Beziehung ist die (1, 1)-Korrespondenz zwischen den Punkten von H und S. — Den Leser, der sich über diese Transformationen zu unterrichten wünscht, verweisen wir auf die einschlägigen Abschnitte bei CLEBSCH-LINDEMANN und SALMON-FIEDLER, sowie auf M. C. JORDAN, „*Cours d'Analyse*", I. Band, 5. Kapitel, wo auch die höheren Singularitäten ziemlich eingehend behandelt sind.

Dies ist eine quadratische Transformation etwas allgemeinerer Art. Durch Umkehrung derselben oder direkt aus den Parameterdarstellungen bekommt man ebenso

$$x' : y' : z' = [x(x-z)] : [y(x-z)] : xz\,.$$

Der Leser versuche die Transformationsformeln auch für den allgemeinen Fall, daß λ und μ durch eine bilineare Gleichung (die projektivische Grundgleichung) $a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0$ verknüpft sind, aufzustellen.

§ 42. Umformung der quadratischen Transformation.

84. Um nun die quadratische Transformation zur Auflösung höherer Singularitäten bequem zu verwenden, ist es von Vorteil, sie in eine andere Gestalt zu bringen, die wir als eine direkte Verallgemeinerung der zirkularen Inversion auffassen können. Wir denken uns nämlich irgend einen Basiskegelschnitt K, dazu einen Punkt O als Inversionszentrum und lassen jedem Punkte P denjenigen Punkt P' entsprechen, der zu P auf OP in bezug auf K konjugiert ist. Das Fundamentaldreieck der Transformation ist dann, wenn T und T' die beiden Berührungspunkte der Tangenten von O an K sind $\triangle OTT'$, denn dem Punkte O entspricht offenbar die ganze Gerade TT' (Basisgerade), dem Punkte T die Gerade OT und dem Punkte T' die Gerade OT'. Gegenüber der Transformation von Nr. 73 besteht nur der Unterschied, daß zwei Koordinatenseiten vertauscht sind. Am deutlichsten zeigt dies die analytische Behandlung. Nehmen wir OT, OT', TT' als Seiten x_1, x_2, x_3, so kann die Gleichung des Basiskegelschnittes geschrieben werden

$$x_3^2 - x_1 x_2 = 0\,.$$

Hat der Punkt P' die Koordinaten x_1', x_2', x_3', so ist seine Polare

$$-x_1 x_2' - x_2 x_1' + 2 x_3 x_3' = 0\,,$$

und die Gleichung von OP' ist

$$x_1 x_2' - x_2 x_1' = 0\,.$$

Daraus erhält man unschwer die Transformation

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_1' x_3' : x_2' x_3' : x_1' x_2' = \frac{1}{x_2'} : \frac{1}{x_1'} : \frac{1}{x_3'},$$

die durch Vertauschung von x_1' und x_2' tatsächlich in die von Nr. 73 übergeht.

Zur Auflösung von Singularitäten erweist es sich indessen als noch vorteilhafter, sich des speziellen Falles zu bedienen, daß K ein Linienpaar (L L′) ist (Fig. 42). Dann sind die

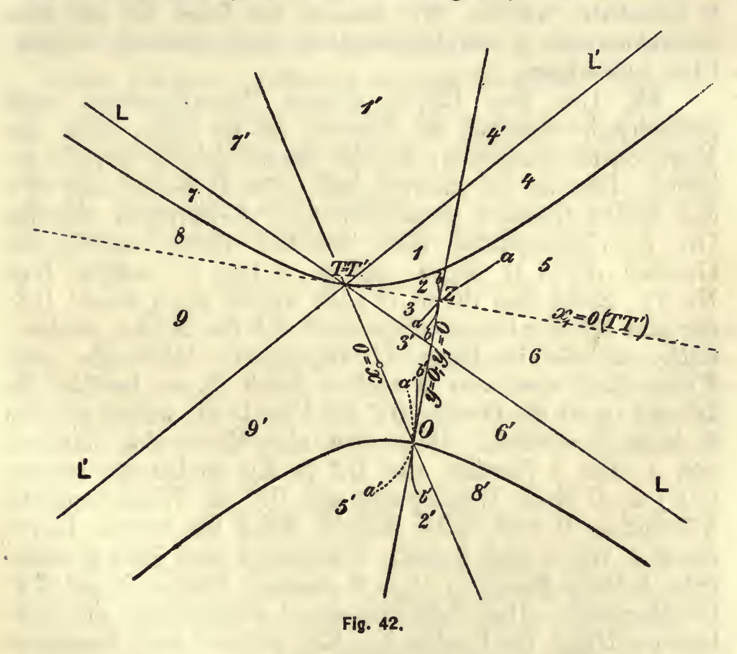


Fig. 42.

Punkte T und T' im Doppelpunkt des Linienpaares vereinigt. Die Verbindungslinie TT' bleibt bestimmt und ist harmonisch zu OT in bezug auf L und L′. Vom Koordinatendreieck sind also nur die Seiten $x_3\,(TT')$ und $x_1\,(OT)$ fixiert und wir können x_2 beliebig durch O als dritte Koordinatenseite legen. Nimmt man K in der Form

$$x_1^2 - x_3^2 = 0,$$

so erhält man wie oben die Transformationsformeln

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_1' x_3' : x_2' x_3' : x_1'^2$$

und

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 x_3 : x_2 x_3 : x_1^2 .$$

Infolge dieser Transformation entspricht jedem Kegelschnitt eine Quartik mit Berührungsknoten in T.

Bem. Würde man, was eine dritte Möglichkeit ergäbe, O auf dem nicht zerfallenden Kegelschnitt K annehmen, so erhielte man Kurven mit Oskulationsknoten in T, da dann T, O, T' auf K konsekutiv würden. Wir machen den Leser nur auf diese weitere bequeme Konstruktionsmethode dieser Gattung von Quartiken aufmerksam.

85. Um den Effekt unserer Transformation auch geometrisch verfolgen zu können, ist es nötig, noch den Kegelschnitt anzugeben, der die unendlichferne Gerade abbildet. Dies ist in unserem Falle eine Hyperbel mit zwei den beiden Geraden parallellaufenden Asymptoten, die den Ort der Mittelpunkte aller Strecken bildet, welche auf Geraden durch O liegen und in L bez. L′ endigen (vgl. Nr. 7). Zieht man durch O noch irgend einen Strahl OZ, der ganz beliebig ist, so entsprechen sich die Gebiete wechselseitig so, wie in Figur 42 angegeben. Geht also eine Kurve $(a\,a)$ etwa von *3* nach *5* durch Z, so berührt die Inverse $(a'\,a')$ die Gerade OZ im Punkte O, indem sie von *3′* nach *5′* verläuft. Geht aber eine Kurve $(b\,b)$ durch Z von *2* nach *3* (berührt also OZ in Z), so hat die Inverse $(b'\,b')$ in O einen Wendepunkt mit OZ als Wendetangente, während in O eine Spitze auftritt, wenn die inverse Kurve durch Z von *3* nach *6* geht. Umgekehrt wird jeder gewöhnliche k-fache Punkt in O in k einzelne Punkte Z auf TT' transformiert. Den Schleifen in O entsprechen die Verbindungsbögen der Punkte Z. Koinzidieren zwei Tangenten des k-fachen Punktes, so koinzidieren auch zwei Punkte Z, d. h. die Inverse tangiert TT' in Z, wie schon vorhin erwähnt.

Zur analytischen Behandlung der Transformation ist es oft noch bequemer, besonders wenn eine Singularität mit der Tangente OZ aufzulösen ist, für x_1, x_2, x_3 nicht homogene Koordinaten x, y, 1 zu nehmen mit O als Anfangspunkt, und für x_1', x_2', x_3' die neuen Koordinaten 1, y_1, x_1 mit

dem Anfangspunkt Z. Die Transformationsformeln lauten dann einfach

$$x : y : 1 = x_1 : y_1 x_1 : 1 ,$$

oder

$$x = x_1 ; \quad y = x_1 y_1 \quad [y_1 = y/x ;\ x_1 = x] .$$

Diese Form der Transformation benutzten schon gelegentlich Newton und Cramer, erst Noether[62]) aber verwendete sie systematisch zur Auflösung höherer Singularitäten.

§ 43. Anwendung auf die Diskussion der 4 Formen des dreifachen Punktes. Auflösung der Schnabelspitze. Beispiele.

85a. Wir wollen mit Hilfe der angegebenen Noetherschen Transformation zunächst den gewöhnlichen dreifachen Punkt an einer Quartik diskutieren, damit unsere Betrachtungen über rationale Quartiken einen gewissen Abschluß erhalten. Dazu wählen wir die Gleichung

$$y(a y^2 + 2 b x y + c x^2) = x^4 ,$$

wo wir OZ ($y = 0$) als die eine Tangente nahmen, um nicht eine allgemeine kubische Form diskutieren zu müssen. Das Glied der rechten Seite bedingt zwar einen Flachpunkt im Unendlichen; dies hat aber auf die Gestaltung des dreifachen Punktes keinerlei Einfluß. Die Transformation ergibt, nach Abtrennung von x_1^3

$$y_1 (a y_1^2 + 2 b y_1 + c) = x_1 ,$$

eine Kubik mit Spitze im Unendlichen, also vom Geschlechte 0. Der dreifache Punkt ist also sicher drei Doppelpunkten äquivalent zu rechnen. Die drei Schnittpunkte der Kubik mit TT' ($x_1 = 0$) entsprechen den drei Tangenten des dreifachen Punktes. Wir unterscheiden vier Fälle:

I. $b^2 > a c$; die Kubik trifft TT' in drei verschiedenen reellen Punkten; der dreifache Punkt hat drei verschiedene reelle Tangenten.

---

[62]) *„Über die singulären Wertsysteme einer algebraischen Funktion und die singulären Punkte einer algebraischen Kurve."* Math. Ann. 9, 1876, S. 166—182.

Beisp. Fig. 43 stellt als Typus für diese Art des dreifachen Punktes die Kurve $y(y^2 - x^2) = x^4 + y^4$ dar.

Solche Kurven nannte die galante Zeit des 18. Jahrhunderts »Lemnisceros« (nœud d'amour), indem man das Stammwort von »Lemniskate«[61a]) mit $\check{\epsilon}\varrho\omega\varsigma$ = Liebe zusammensetzte.

II. $b^2 = ac$; die Kubik berührt TT'; der dreifache Punkt besteht aus einer Spitze mit durchgehendem Zweig.

Beisp. $yx^2 = x^4 + y^4$, von derselben Gestalt wie die Kurve für $\lambda = 0$ in Fig. 20.

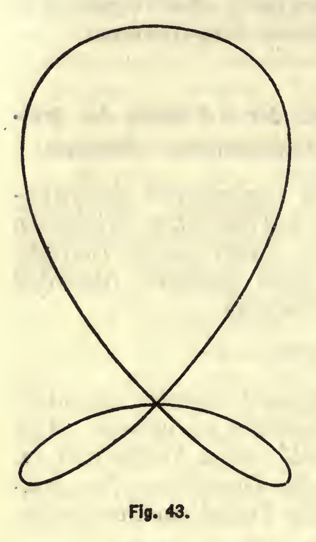


Fig. 43.

III. $b^2 < ac$; die Kubik schneidet TT' nur in einem reellen Punkte; der dreifache Punkt besteht aus einem isolierten Punkte, der auf einem reellen Zweig liegt.

Beisp. $y(x^2 + y^2) = x^4 + y^4$, ein Unifolium ohne ersichtliche Besonderheit.

IV. $b = c = 0$; die Kubik trifft TT' in drei zusammenfallenden Punkten (Wendepunkt); der dreifache Punkt ist ein Spitzpunkt.

Beisp. Die hierhergehörige Kurve $y^3 = x^4 + y^4$ wurde schon in Nr. 60, Beisp. 3 behandelt.

Die französischen Mathematiker des 18. Jahrh. nannten den Spitzpunkt »Lemnisceros infiniment petit«. Wir wissen freilich, daß der Spitzpunkt dem oben Lemnisceros genannten Knoten nur in bezug auf das Geschlecht äquivalent ist (vgl. Nr. 71, Beisp. 4 und das nun Folgende).

Den letzteren Fall wollen wir noch etwas näher ins Auge fassen. Denn er ist typisch für die Transformation höherer Singularitäten. Bezeichnen wir die drei konsekutiven Punkte der Kubik in Z mit Z_1, Z_2, Z_3 in ihrer Aufeinanderfolge, so sind $Z_1 - Z_2$, $Z_2 - Z_3$ Koinzidenzen von konsekutiven Punkten, die durch die Transformation nicht zerstört werden können und daher auch im Spitzpunkt enthalten

sein müssen. Daraus folgern wir ohne weiteres, daß der Spitzpunkt zweien Spitzen und einem gewöhnlichen Doppelpunkte äquivalent ist, da die koinzidierenden Punkte Z_1, Z_3 nicht konsekutiv sind. Auch zeigt sich hier gleich der Nachteil dieser Transformationsmethode, da die Spitzen, welche die Singularität enthält, nur indirekt ersichtlich werden.

86. Dennoch ist es durch eine Fortsetzung der eben angestellten Überlegungen möglich, für jede Singularität die Äquivalenzzahlen d und r und schließlich auch δ und ϱ exakt anzugeben[63]). Wir wollen jedoch hierauf nicht weiter eingehen und zeigen nur noch an dem Beispiel der Schnabelspitze, wie es vermittels unserer Transformation unter günstigen Umständen doch möglich ist, die sog. »penultimate« Form der Singularität und ihrer Gleichung herzustellen, d. h. die Form, aus der sie durch Konstantenänderung (Zusammenziehen) erzeugt werden kann. Dabei werden wir auch mehrere andere Eigenschaften unserer Transformation kennen lernen.

Die Gleichung der typischen Kurve mit Schnabelspitze ist

$$y = x^2 \pm x^{\frac{5}{2}},$$

Diese geht durch die obige NOETHERsche Transformation über in die Kubik mit Spitze in Z

$$(y_1 - x_1)^2 = x_1^3.$$

Aus der Näherungsparabel (P) $y = x^2$ ist die Spitzentangente (T) $y_1 = x_1$ geworden [Fig. 44(a)]. Wir verändern nun die Kubik in

$$(y_1 - x_1)[y_1 - (1 + \varepsilon) x_1] = x_1^3$$

und gehen damit von der Spitze zu einem Doppelpunkte in Z über. Zurücktransformiert gäbe dies eine Kurvenform mit Berührungsknoten und Schleife in O, aus der die Schnabelspitze durch Zusammenziehen der Schleife, für $\varepsilon = 0$,

---

[63]) Bez. weiterer Ausführung sei der Leser auf die beiden instruktiven Aufsätze von CHARLOTTE SCOTT verwiesen: *„On the higher Singularities of Plane Curves."* Am. J. of Math. **14**, 1892, S. 301—325 und *„The Nature and Effect of Singularities of Plane Algebraic Curves"*. Ebenda **15**, 1893, S. 221—243.

wieder entsteht [Fig. 44(b)]. Dies ist jedoch nicht die penultimate Form, für welche nicht nur Geschlechtsgleichheit bestehen muß, sondern die auch bez. der PLÜCKERschen Formeln der Schnabelspitze äquivalent ist. Wir wissen längst, daß diese einen Doppelpunkt und eine Spitze hat (Nr. 65). Verschieben wir nun den Doppelpunkt der Kubik etwas, z. B. auf der y_1-Linie, so trennt sich der Berührungsknoten in zwei Doppelpunkte, deren einer in O liegt mit zwei Tangenten, die nach den beiden Schnittpunkten L und M der Knotenschleife mit $TZ(x_1 = 0)$ laufen, deren anderer auf $OZ(y_1 = 0)$ fällt [Fig. 44(c)]. Wir bringen nun die Schleife des Knotens in O zum Verschwinden, indem wir L und M koinzidieren lassen. Machen wir die Transformation

$$x_1 = x' + \delta, \quad y_1 = y',$$

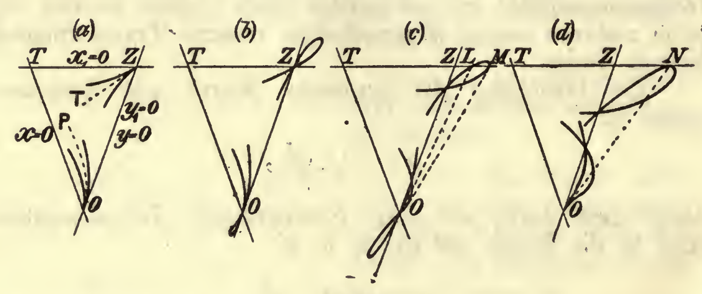


Fig. 44.

so wird unsere Kubik

$$(y' - x' - \delta)[y' - (1 + \varepsilon)x' - (1 + \varepsilon)\delta] = (x' + \delta)^3.$$

Setzt man hier $x' = 0$, so ergibt die Diskriminante der für y' entstehenden quadratischen Gleichung den gesuchten Wert $\delta = -\frac{\varepsilon^2}{4}$. Die verschobene Kubik mit Knoten auf OZ, dessen Schleife TZ in N berührt [Fig. 44(d)], hat also die Gleichung

$$(1) \quad \left(y' - x' + \frac{\varepsilon^2}{4}\right)\left[y' - (1 + \varepsilon)\left(x' - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)\right] = \left(x' - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^3$$

und diese gibt rückwärts transformiert $(x' = x;\ y' = y/x)$, was wir wollen. Nach Abstoßung unwesentlicher Faktoren ergibt sich

$$(1^*)\left[y - x^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}x\right]\cdot\left[y - (1+\varepsilon)\left(x^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}x\right)\right] = x^2\left(x - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^3$$

als implizite Gleichung einer C_5 mit Spitze in O und einem Doppelpunkte mit den Koordinaten $y = 0$, $x = \frac{\varepsilon^2}{4}$, die für immer kleinere ε der Kurve $(y - x^2)^2 = x^5$ näher und näher kommt. Kurve (1*) ist für $\varepsilon = 1{,}2$ in Fig. 45 dargestellt und gibt eine reelle Auflösung der Fig. 23 (S. 110), in der nicht bloß Spitze und Doppelpunkt, sondern auch Wendepunkt

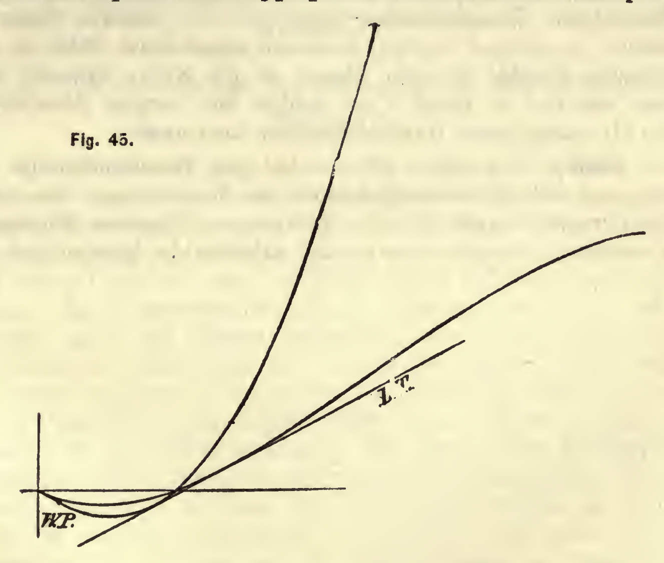


Fig. 45.

und Doppeltangente sichtbar sind. Gleichzeitig kann dieselbe Figur als reelle Auflösung des Rückkehrflachpunktes von S. 136 gelten, wenn man die aus der Figur leicht ersichtliche zweite Doppeltangente und den zweiten Wendepunkt auch noch zur Singularität zieht.

Durch die gegebenen Beispiele glauben wir genügend klar gemacht zu haben, wie irgend eine Superlinearität (Schnabelspitze, Berührungsknoten, Spitzpunkt usw.) durch die von uns angegebene Wahl des Koordinatensystems in eine einfachere Singularität übergeführt werden kann, die dann eventuell weiter aufzulösen ist. Vermeidet man dabei,

daß die Kurve irgend eine Koordinatenseite berührt, so können in den Ecken auch keine Spitzen auftreten. Demnach haben wir bewiesen:

Jede Kurve kann durch eine Folge von quadratischen Transformationen der Ebene in eine andere von gleichem Geschlecht mit gewöhnlichen vielfachen Punkten (mit getrennten Tangenten) übergeführt werden.

Beisp. 1. Die Kurve $y^2 = x^5$ hat einen Rückkehrflachpunkt im Ursprung, einen Wendespitzpunkt im Unendlichen. Die NOETHERsche Transformation ergibt $y_1^2 = x_1^3$; dieselbe Transformation ($y_1 = x_2 y_2$; $x_1 = x_2$) nochmals angewendet, führt zu der einfachen Parabel $x_2 = y_2^2$. Daher ist die Kurve rational, was auch aus den in Beisp. 5 am Schluß des vorigen Abschnittes (Nr. 71) angegebenen Äquivalenzzahlen hervorgeht.

Beisp. 2. Die Kurve $y^3 = x^5$ hat den Wendespitzpunkt im Ursprung, den Rückkehrflachpunkt im Unendlichen. Die erste Transformation ergibt $y_1^3 = x_1^2$. Da hier $x_1 = 0$ Tangente ist, müssen wir setzen $x_1 = x_2 y_2$; $y_1 = y_2$ und erhalten die Parabel $y_2 = x_2^2$.

ABSCHNITT IX.

DAS VERALLGEMEINERTE KORRESPONDENZ-PRINZIP.

§ 44. Korrespondenzen auf rationalen und nichtrationalen Kurven.

87. Nach den Ergebnissen des vorigen Kapitels, die uns berechtigen alle Kurven (desselben Geschlechtes p), die ineinander rational transformierbar sind, in gewissem Sinne als gleichwertig zu betrachten, wird es nicht wundernehmen, daß schon CHASLES und DE JONQUIÈRES auf den Gedanken kamen, das Korrespondenzprinzip, das wir in Nr. 35 ableiteten, auch auf höhere (allerdings nur rationale) Kurven anzuwenden. Um gleich ein Beispiel zu geben, denken wir uns zwei projektive Punktreihen derselben Geraden G von einem Punkte P eines Kegelschnitts K auf diesen projiziert, so wird die (1,1)-Korrespondenz, die durch diese projektive Beziehung auf K definiert wird, zwei Doppelelemente (»Koinzidenzpunkte«) haben, die den Doppelpunkten der Projektivität auf G entsprechen. Verbindet man alle Paare entsprechender Punkte auf K durch Gerade, so umhüllen diese, wie sich vermittels desselben CHASLESschen Korrespondenzprinzips leicht zeigen läßt, eine C^2, d. h. wiederum einen Kegelschnitt ***K***, der den ersteren in den zwei Koinzidenzpunkten der Projektivität (doppelt) berührt. Es ist nur ein sehr spezieller Fall dieser (1,1)-Korrespondenz auf dem Kegelschnitt, wenn wir entsprechende Punkte auf K dadurch festlegen, daß wir durch einen außerhalb K liegenden Punkt O alle Geraden ziehen und die Schnittpunkte derselben mit K sich gegenseitig (involutorisch) entsprechen lassen. ***K*** ist dann der doppelt zu zählende Punkt O (oder als Ordnungskurve das Tangentenpaar von O an K).

Beisp. 1. Es ist auch nicht schwer, sich eine (1, 2)-Korrespondenz auf einem Kegelschnitt K herzustellen. Es sei außer K noch eine Gerade G gegeben und auf K ein Punkt O. Wir ziehen durch O irgend einen Strahl, der K in P, G in Π schneiden möge. Die Polare von Π in bezug auf K schneide K in den beiden Punkten P_1, P_2. Dann besteht zwischen P und dem Paar P_1, P_2 eine (1, 2)-Korrespondenz, die 3 Koinzidenzpunkte haben muß. Diese sind offenbar die beiden Schnittpunkte M_1, M_2 von G mit K und der Punkt O. In O fällt etwa P_1, während P_2 getrennt liegt; in M_1 und M_2 aber fallen beide Punkte P_1 und P_2 zusammen. Doch bedingt letzteres keine höhere Gattung von Koinzidenzpunkt, wie für den allgemeinen Fall CAYLEY[64]) gezeigt hat.

Beisp. 2. Es möge auf einer allgemeinen rationalen n-ik eine Korrespondenz dadurch gegeben sein, daß jedem Punkt P der Kurve die $(n-1)$ Punkte P' entsprechen, die mit P auf einer durch einen außerhalb liegenden festen Punkt O gehenden Geraden liegen, so ist auf der Kurve eine $(n-1, n-1)$-Korrespondenz definiert, die $2n-2$ Koinzidenzen haben muß. Solche treten nun offenbar ein für alle Tangenten durch O an die Kurve, aber auch für alle Strahlen, die von O nach den r Spitzen der Kurve gehen. Demnach erhalten wir die bekannte Formel $\nu + r = 2n - 2$ (Nr. 44).

88. Wir haben uns aber nun mit der Frage zu beschäftigen, wie denn bei einer Korrespondenz auf einer nicht rationalen Kurve die Formel für die Zahl der Koinzidenzpunkte lauten müsse. Wiederum war es hier CAYLEY, der 1866, ohne einen eigentlichen Beweis zu haben, durch einen ihm genügend scheinenden Induktionsschluß auf die richtige Formel kam[65]), die er dann bald mit einer Menge von Beispielen illustrierte[64]). Erst BRILL gab etwas später einen einwandfreien Beweis für die Formel[66]).

---

[64]) *„Second Memoir on the curves, which satisfy given conditions; the principle of correspondence."* Philos. Trans. **158**, 1868, S. 145—180.

[65]) *„Note sur la correspondance de deux points sur une courbe."* C. R. Ac. sc. Paris **62**, 1866, S. 586—590.

[66]) *„Über Entsprechen von Punktsystemen auf einer Curve."* Math. Ann. **6**, 1872, S. 33—65. Wir folgen oben dem mehr geometrischen Gedankengang, den derselbe Gelehrte in der Abhandlung *„Über die Korrespondenzformel"*, Math. Ann. **7**, 1874, S. 607—622 entwickelt hat.

Wir können schon aus den angeführten Beispielen entnehmen, wie die Korrespondenz auf einer n-ik $f=0$ geometrisch zustande kommt. Die einem Punkte P entsprechenden Punkte werden durch eine gewisse Kurve Θ, die in den obigen Fällen immer eine Gerade war, auf f ausgeschnitten. Es muß dann außer $f=0$ nur noch eine Gleichung

$$\Theta\,[(x_1, x_2, x_3)^\varkappa; (y_1, y_2, y_3)^\lambda] = 0$$

gegeben sein, welche die x_i im $\varkappa^{\text{ten}}$, die y_i im λ^{ten} Grade enthält. Diese Gleichung wird für ein bestimmtes x eine λ-ik Θ_λ, für ein bestimmtes y eine $\varkappa$-ik $\Theta_\varkappa$ darstellen, die f in je $\lambda n = l$ bez. $\varkappa n = k$ Punkten schneiden und also auf f eine (k, l)-Korrespondenz definieren. Setzt man aber in Θ $x = y$, so ergibt sich eine Kurve $\Theta_{\varkappa+\lambda}$ $(\varkappa+\lambda)^{\text{ter}}$ Ordnung, die alle Punkte der Ebene enthält, für welche die entsprechende Θ_λ durch (x), oder die entsprechende $\Theta_\varkappa$ durch (y) geht. Diese Kurve $\Theta_{\varkappa+\lambda}$ schneidet demnach auf f die Koinzidenzpunkte aus. Daher hat unsere (k, l)-Korrespondenz auf f

$$n(\varkappa + \lambda) = k + l$$

Koinzidenzpunkte, entsprechend dem Chaslesschen Korrespondenzprinzip.

Die Sache liegt aber im allgemeinen so, wie schon im Beispiel 2 oben, daß die Θ_λ für jeden Punkt (x) auf f ein- oder mehreremal, sagen wir im allgemeinen γ-mal durch (x) und die $\Theta_\varkappa$ δ-mal durch (y) selbst geht, was entweder durch einen vielfachen Punkt, meist aber durch eine Berührung der betreffenden Ordnung veranlaßt wird. Diese γ bez. δ Punkte sind dann jedesmal auszuschließen. Gerade durch das Auftreten dieser Punkte verändert sich aber die Zahl der Koinzidenzen. So ist in unserem Beisp. 2 $\gamma = \delta = 1$ und die erlangte Formel gilt nur für rationale Kurven. Wir werden nun zunächst zeigen, daß in jedem Falle $\gamma = \delta$ ist, was die Sache wesentlich vereinfacht. Denn die zu definierende Korrespondenz hängt dann nur noch von γ ab.

§ 45. Wertigkeit einer Korrespondenz. Gemeinsame Paare zweier Korrespondenzen.

89. An den Zeuthenschen Gedankengang von Nr. 45 anschließend denken wir uns in der Ebene der Kurve f

zwei beliebige Punkte A und A' und ziehen von A aus einen Strahl X durch einen Punkt (x) von f. Zu $x)$ und allen anderen Schnittpunkten von X mit f bestimmen wir die entsprechenden Punkte (y) und verbinden jeden derselben mit A' durch einen Strahl Y. Dann entsteht durch die Schnittpunkte der Strahlen X und Y, wenn (x) auf f läuft, eine Kurve Γ, die wir ebenso erhalten müßten, wenn wir von einem variablen Punkte (y) ausgegangen wären. Die Kurve Γ schneidet nun offenbar auf f die Koinzidenzpunkte aus. Da aber in jeden Punkt (x) γ uneigentliche Koinzidenzen fallen, Γ aber auch durch diese gehen muß, so muß Γ die Kurve f als γ-fachen Bestandteil enthalten. Daher entspricht natürlich auch jedem Strahl Y ein γ-facher Strahl X, der durch denselben Punkt (y) auf f geht. Und es ist $\delta = \gamma$. Da die Scheitel A, A' der Strahlenbüschel aber ganz beliebig waren, können wir von denselben absehen und brauchen daher im folgenden immer nur anzugeben, wieviel in (x) fallende Punkte (y) die Kurve Θ_λ mit f gemein hat. Die Zahl γ dieser Punkte heißt dann die »Wertigkeit« der Korrespondenz.

Nach dieser wichtigen Feststellung sei zunächst auf f außer der schon vorhin angenommenen $(k, l)_0$-Korrespondenz Φ [wo der angehängte Index 0 die Wertigkeit angibt] noch eine zweite $(k', l')_0$-Korrespondenz Φ' gegeben und wir fragen nach den Punkten (x) und (x') der beiden Korrespondenzen, die zusammenfallen, wenn wir (y) der Kurve f entlang führen. Um die Anzahl dieser Punkte zu finden, bestimmen wir die Ordnung einer Kurve Ψ, die dieselben ausschneidet, indem wir die Anzahl der Punkte suchen, in denen Ψ eine beliebige Gerade G schneidet. Irgend einem Punkte (x) dieser Geraden entsprechen vermöge der Korrespondenz Φ' l' Punkte (y) auf f, die durch eine $\Theta_{\lambda'}$ ausgeschnitten werden. Jedem von diesen l' Punkten entspricht vermöge Φ eine $\Theta_\varkappa$, die auf G $l'\varkappa$ Punkte (x') ausschneidet. Jedem dieser Punkte entsprechen aber auf dieselbe Weise $k'\lambda$ Punkte (x) auf G. Auf G ist also eine $(l'\varkappa, k'\lambda)$-Korrespondenz von Punkten (x), (x'). Die Ordnung der Kurve Ψ, die man sich wieder durch zwei Strahlenbüschel erzeugt denken kann, ist demnach $l'\varkappa + k'\lambda$. Auf f gibt es daher

$$n(l'\varkappa + k'\lambda) = l'k + k'l$$

Koinzidenzen von (x) und (x') oder ebensoviele Punktepaare (x, y), die den beiden Korrespondenzen zugleich genügen.

Beisp. Sind $P = 0$, $Q = 0$ die (binären) Gleichungen zweier Punkte einer Geraden, so wird zwischen zwei beliebigen Punkten $P + \lambda Q = 0$, $P + \mu Q = 0$ derselben Geraden eine (1, 1)-Korrespondenz durch eine bilineare Gleichung

$$\Theta(\lambda, \mu) \equiv a \lambda \mu + b \lambda + c \mu + d = 0$$

hergestellt. Infolge einer zweiten Projektivität auf derselben Geraden soll aber dem Punkte (λ) [d. h. dem Punkte mit dem Parameter λ] ein Punkt (μ') entsprechen, vermöge der Gleichung

$$\Omega(\lambda, \mu') \equiv a' \lambda \mu' + b' \lambda + c' \mu' + d' = 0 .$$

Nach dem Obigen müssen diese beiden Projektivitäten $1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$ gemeinsame Paare haben. In der Tat wird nur dann $\mu = \mu'$ für dasselbe λ, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} a \lambda + c & b \lambda + d \\ a' \lambda + c' & b' \lambda + d' \end{vmatrix} = 0$$

ist. Dies ergibt aber eine quadratische Gleichung für λ mit den Wurzeln λ_1, λ_2. Eliminiert man jedoch aus Θ und Ω λ, so ergibt sich eine bilineare Relation zwischen μ und μ', die nur der selbstverständlichen Tatsache analytischen Ausdruck verleiht, daß auch die Punktreihen der μ und μ' projektiv sind. Diese Relation lautet in Determinantenform

$$\begin{vmatrix} a \mu + b & c \mu + d \\ a' \mu' + b' & c' \mu' + d' \end{vmatrix} = 0 .$$

Setzt man hier $\mu = \mu'$, so ergibt sich eine quadratische Gleichung für die Doppelpunkte μ_1, μ_2 dieser projektiven Beziehung. Wie man leicht einsieht, sind dann gerade $\lambda_1 | \mu_1$, $\lambda_2 | \mu_2$ die den beiden Projektivitäten gemeinsamen Punkte. Der Leser möge aber versuchen, dieses Resultat auch durch direkte Rechnung zu bestätigen, indem er vermöge $\Theta = 0$ oder $\Omega = 0$ die Werte μ_1 und μ_2, die λ_1 und λ_2 entsprechen, aufstellt und die quadratische Gleichung sucht, die dieselben zu Wurzeln hat. Dieselbe wird dann mit der eben angegebenen übereinstimmen.

Sind beide Projektivitäten involutorisch ($b = c$; $b' = c'$), so reduzieren sich wegen des vollständig symmetrischen Entsprechens die beiden gemeinsamen Paare auf ein einziges. In der Tat stellen dann auch die beiden gegebenen Determinanten dasselbe, eben das gemeinsame Punktepaar dar.

90. Wir gehen nun einen Schritt weiter, indem wir die Anzahl der gemeinsamen Paare zweier Korrespondenzen $\Phi \equiv (k, l)_0$ und $\Phi' \equiv (k' - \gamma', l' - \gamma')_{\gamma'}$ zu bestimmen suchen. Wir werden gleich sehen, daß auch in diesem Falle noch die Formel der vorigen Nummer gilt, wenn wir nur die getrennt liegenden Paare (x, y) in Betracht ziehen. Von der Zahl $l'k + k'l$ sind dann nämlich diejenigen Paare in Abzug zu bringen, für welche (x) in (y) fällt. Eine solche Koinzidenz kann aber nur an den Koinzidenzstellen von Φ eintreten, und zwar an jeder Stelle γ'-mal, weil Φ' dort immer einen γ'-fachen Punkt besitzt. Es ist aber

$$l'k + k'l - (k + l)\gamma' = k(l' - \gamma') + l(k' - \gamma'),$$

was wir beweisen wollten.

Der allgemeinste Fall ist nun der, daß

$$\Phi \equiv (k - \gamma, l - \gamma)_\gamma \qquad \Phi' \equiv (k' - \gamma', l' - \gamma')_{\gamma'}.$$

Um diesen Fall auf den vorigen zurückzuführen, deformieren wir Φ ein wenig in eine Korrespondenz Φ_1 von der Art $(k, l)_0$, die zwar in $(x) = (y)$ keinen γ-wertigen Punkt besitzt, dafür aber einen Punkthaufen von γ Elementen in nächster Nähe auf f. Wir haben dann von der vorhin erhaltenen Zahl $l'k + k'l - (k + l)\gamma'$ noch eine Zahl von Punktepaaren abzuziehen, die von γ abhängt und die erst zusammenfallend werden, wenn Φ_1 wieder in Φ übergeht. Lassen wir nun den Punkt (y) auf f laufen, so begleiten ihn die γ Punkte (x) von Φ_1 in unmittelbarer Nähe. Rückt aber (y) in die Nähe eines eigentlichen Koinzidenzpunktes (y_1) von Φ', so wird auch der Punkthaufen von Φ_1 ganz in die Nähe von (y_1) rücken, und wenn wir mit (y) fortschreiten, schließlich in (y_1) fallen und sich dann wieder entfernen. Daraus schließt man, daß beim Übergange von Φ_1 auf Φ in all den Koinzidenzpunkten von Φ', deren Anzahl N' sein möge — diese Anzahl N' zu bestimmen ist gerade die Hauptaufgabe dieses Abschnitts — zusammenfallende Koinzidenzpaare von Φ und Φ' auftreten werden, und zwar je γ, erzeugt durch die γ Punkte des begleitenden Punkthaufens. Für die Zahl N aller getrennten Koinzidenzpaare von Φ und Φ' haben wir also

$$N = l'k + k'l - \gamma'(k + l) - \gamma N'.$$

Genau so hätten wir aber, durch Deformation von Φ' in Φ'_1 eine Formel erhalten für dieselbe Zahl:

$$N = k'l + l'k - \gamma(k' + l') - \gamma' N,$$

wo N die Koinzidenzzahl für die Korrespondenz Φ bedeutet.

Durch Vergleichung beider Ausdrücke ergibt sich

$$\gamma'(N - k - l) = \gamma(N' - k' - l').$$

Wir sehen also ein, daß der Quotient

$$Q \equiv \frac{N - (k - \gamma) - (l - \gamma)}{\gamma} = \frac{N' - (k' - \gamma') - (l' - \gamma')}{\gamma'}$$

von der zugrunde gelegten Korrespondenz ganz unabhängig ist. Q hängt daher nur von f, und zwar offenbar nur vom Geschlechte p von f ab. Um Q zu bestimmen, brauchen wir also bloß einen speziellen Fall zu betrachten.

§ 46. Die Cayley-Brillsche Korrespondenzformel. Beispiele.

91. Wir verwenden dazu das Beisp. 2 von Nr. 87, indem wir $p \neq 0$ voraussetzen. Dort ist $k = l = n$, $\gamma = 1$ zu setzen. Aus Nr. 40 (10) ist uns bekannt, daß

$$N = v + r = 2n - 2 + 2p$$

ist. Daraus ergibt sich ohne weiteres

$$Q = 2p$$

und wir erhalten

$$N = (k - \gamma) + (l - \gamma) + 2\gamma p.$$

Zusammenfassend können wir also sagen:

Die Anzahl der Koinzidenzpunkte einer Korrespondenz $\Phi \equiv (\alpha, \beta)_\gamma$ auf einer Kurve f vom Geschlechte p ist

$$\boldsymbol{N = \alpha + \beta + 2\gamma p}.$$

Dies ist die sogenannte Cayley-Brillsche Korrespondenzformel: und wir sehen, daß die Chaslessche Formel immer dann gilt, wenn entweder p, oder γ oder beide zugleich verschwinden.

Indem wir diesen Wert von N in einen der beiden Ausdrücke für N einsetzen, erhalten wir ohne weiteres für die Anzahl der zwei Korrespondenzen $(\alpha, \beta)_\gamma$ und $(\alpha', \beta')_{\gamma'}$ gemeinsamen Koinzidenzpaare

$$\mathsf{N} = \alpha\beta' + \beta\alpha' - 2\gamma\gamma' p .$$

Beisp. 1. Lassen wir auf einer n-ik vom Geschlechte p mit r Spitzen jedem Punkte P alle die $n-2$ Punkte P' der Kurve entsprechen, die auf der Tangente von P liegen (die Tangentialpunkte von P), so entsprechen umgekehrt jedem Punkte P' der Kurve die $\nu-2$ Berührungspunkte der von P' an die Kurve gehenden Tangenten. Hier ist Θ_λ die Tangente in P, die dort $\gamma = 2$ Schnittpunkte mit der C_n hat und $\Theta_\varkappa$ ist die erste Polare von P'; diese berührt in P' und hat daher ebenfalls $\delta = \gamma = 2$ Schnittpunkte mit der Kurve. Die Korrespondenz (P, P') ist von der Art $(n-2, \nu-2)_2$. Als Koinzidenzpunkte erhält man offenbar die Wendepunkte und Spitzen der Kurve. Das gibt die Beziehung

$$\varrho + r = n + \nu + 2(2p-2) .$$

Setzt man noch $2p - 2 = \nu + r - 2n$, so resultiert die bekannte Formel

$$r - \varrho = 3(n-\nu) .$$

Hier ist nur $\nu = n(n-1) - 2d - 3r$ zu setzen, um die Anzahl

$$\varrho = 3n(n-2) - 6d - 8r$$

der Wendepunkte zu erhalten, die somit ohne jede Bezugnahme auf H abgeleitet wurde.

Durch ein ähnliches Verfahren gelangt man auch direkt zu der Anzahl der Doppeltangenten. Doch ist es hierzu nötig, die Korrespondenzformel noch einer ebenfalls schon von Cayley angegebenen Erweiterung zu unterziehen, bez. deren wir auf die Originalabhandlungen verweisen müssen.

Beisp. 2. Zeuthen hat, wie wir schon anmerkten[42]), vermittels desselben Gedankengangs, dem wir in Nr. 45 folgten, eine Formel gefunden für die Beziehung zwischen den Geschlechtszahlen p und p' zweier Kurven C_n^ν und $C_{n'}^{\nu'}$ mit r bez. r' Spitzen, zwischen denen eine (α, β)-Korrespondenz besteht. Wir wollen, was Zeuthen nur andeutete, die Cayley-Brillsche Korrespondenzformel anwenden, um zu der gesuchten Beziehung zu gelangen. Es seien N bez. N die Koinzidenzzahlen zweier Punkte auf C

bez. C', die demselben Punkte der anderen Kurve entsprechen. Doch soll der entsprechende Punkt auf der anderen Kurve nicht zugleich auch ein doppelter sein; vielmehr wollen wir die Anzahl der etwa vorkommenden sich gegenseitig entsprechenden Koinzidenzpunkte auf beiden Kurven, die dann doppelt gezählt werden müssen, mit $\mathfrak{N}$ bezeichnen. Nun wollen wir die Korrespondenz auf eine der beiden Kurven, z. B. C übertragen. Jedem Punkte P auf C entsprechen β Punkte P' auf C' und jedem Punkte P' auf C' $(\alpha - 1)$ Punkte außer P auf C. Dem Punkte P können wir also auf C $\beta(\alpha - 1)$ Punkte P_1 entsprechen lassen, und für jeden von diesen Punkten P_1 gibt es auf dieselbe Weise $\beta(\alpha - 1)$ Punkte P. Die Wertigkeit der Korrespondenz (P, P_1) ist aber β, da der Punkt P jedem Punkte P' β-mal entspricht. Die Korrespondenz hat demnach die Form $[\beta(\alpha - 1), \beta(\alpha - 1)]_\beta$ und wir erhalten für die Koinzidenzen

$$N + 2\,\mathfrak{N} = 2\,\beta\,(\alpha - 1) + 2\,\beta\,p$$

und

$$N' + 2\,\mathfrak{N} = 2\,\alpha\,(\beta - 1) + 2\,\alpha\,p'.$$

Hieraus folgt durch Subtraktion die gesuchte Relation

$$N - N' = 2\,\beta\,(p - 1) - 2\,\alpha\,(p' - 1),$$

die sich für $\alpha = \beta = 1$, also $N = N' = 0$ auf $p = p'$ reduziert.

Verbindet man die entsprechenden Punkte P, P' beider Kurven durch Gerade, so hüllen die Verbindungslinien eine Kurve ein von der Klasse $n\beta + n'\alpha$. Das Geschlecht $\mathfrak{p}$ dieser Kurve genügt der Gleichung

$$2\,(\mathfrak{p} - 1) = N' + \mathfrak{N} + 2\,\beta\,(p - 1) = N + \mathfrak{N} + 2\,\alpha\,(p' - 1).$$

Beide Zahlen mittels der Korrespondenzformel und mittels der ZEUTHENschen Relation abzuleiten, möge der Leser selbst versuchen.

Beisp. 3. Man kann in jedem Punkte P einer höheren Kurve, z. B. einer Kubik, einen Kegelschnitt angeben, der die Kubik dort fünfpunktig berührt. Derselbe wird mit der Kubik noch einen weiteren Schnittpunkt P' gemein haben. Zwischen P und P' besteht dann eine $(1, \omega)_5$-Korrespondenz, wo ω die uns zunächst unbekannte Zahl von Kegelschnitten ist, die durch einen Punkt P' der Kubik gelegt werden können, so daß sie die Kurve in einem Punkte P fünfpunktig berühren. Die Koinzidenzpunkte dieser Korrespondenz werden Punkte sein, in denen ein Kegelschnitt

sechspunktig berührt. Dies sind die sogenannten »sextaktischen« Punkte, auf die zuerst CAYLEY[67]) hinwies.

Ihre Zahl ist bei kubischen Kurven, wie wir im Abschnitt XI (Nr. 103) zeigen werden, 27. Setzen wir diese Zahl für den Augenblick voraus, so können wir ω vermittels der Korrespondenzformel berechnen. Wir erhalten

$$27 = 1 + \omega + 2 \cdot 5 ,$$

also $\omega = 16$. Es gibt demnach durch jeden Punkt einer Kubik 16 Kegelschnitte, die dieselbe irgendwo fünfpunktig berühren.

---

[67]) S. die Abhandlung *„On the Conic of Five-pointic Contact at any point of a Plane Curve"*. Phil. Trans. **149**, 1859, S. 371—400 und ebenda **155**, 1865, S. 545—578.

Works. vol. 4, p. 207
" 5, p. 221

In general, the number of sextactic points is $n(12n-27)-24d-27\kappa$

ABSCHNITT X.

SCHNITTPUNKTSYSTEME AUF KURVEN.

§ 47. Das Cramersche Paradoxon und ein daran anschließender Satz. Das Residuum einer Punktgruppe.

92. Die Untersuchungen, denen wir uns nunmehr zuwenden wollen, hängen nicht ab von den vorausgegangenen. Mit dem direkt vorhergehenden Abschnitte stehen sie jedoch insofern in Zusammenhang, als sie sich ebenfalls mit Systemen von Punkten (»Punktgruppen«) auf Kurven von beliebigem Grade beschäftigen und teilweise zu Sätzen Veranlassung geben, die, wie das vorhin abgeleitete Korrespondenzprinzip einen rational-invarianten Charakter tragen, d. h. nicht bloß gegenüber linearer Transformation, sondern gegenüber jeder rationalen Transformation unverändert richtig bleiben.

Wir haben schon in Nr. 40 durch Abzählung der Konstanten der Gleichung festgestellt, daß zur Bestimmung einer allgemeinen n-ik $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte notwendig sind. Es können aber Fälle eintreten, wo diese Anzahl nicht hinreichend ist. In dem System linearer Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten kann eine Gleichung eine Folge der übrigen sein, dann bleibt ein Koeffizient willkürlich und alle anderen drücken sich linear durch denselben aus. Den gegebenen Bedingungen entspricht dann ein ganzes Büschel $f+\lambda\varphi=0$ von Kurven, wo λ der unbestimmt gebliebene Koeffizient ist. Sind mehr Gleichungen von sämtlichen übrigen abhängig, so wird das System durch die gegebenen $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte von noch höherer Mannigfaltigkeit. Dasselbe heißt im Falle von zwei abhängigen Gleichungen »Netz«, im allgemeinen »lineares System k^{ter} Stufe«:

$$f+\lambda_1\varphi+\lambda_2\psi+\ldots+\lambda_k\chi=0\,.$$

[Über solche Systeme im allgemeinen vergleiche man Abschnitt XIV.]

Einen sehr einfachen Fall können wir schon bei Kubiken demonstrieren. Zur Bestimmung einer solchen sind im allgemeinen neun Punkte nötig. Bilden aber die neun Punkte den vollständigen Durchschnitt zweier Kubiken D und D', so geht durch diese neun Punkte das ganze Büschel $\mathsf{D} + \lambda\,\mathsf{D}' = 0$, und zur Bestimmung einer diskreten Kurve des Büschels ist noch ein weiterer zehnter Punkt nötig. Geben wir aber nur acht Punkte für eine Kubik, so gehen durch diese acht Punkte sicher zwei verschiedene Kubiken D und D', die sich dann noch in einem neunten Punkte schneiden, dem neunten Grundpunkt des Büschels $\mathsf{D} + \lambda\,\mathsf{D}' = 0$. Dieser neunte Punkt ist also durch die acht gegebenen eindeutig bestimmt, und wir können nur acht Punkte zur Bestimmung einer Kubik — die dann immer noch zerfallen kann — ganz beliebig nehmen.

Ganz ähnlich ist es bei Kurven höherer Ordnung. Nur ist dort die Anzahl der mitbestimmten Punkte eine größere. In der Tat, geben wir für eine n-ik nur $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ Punkte, so ist durch dieselben ein ganzes Büschel von n-iken bestimmt, das durch n^2 Basispunkte geht. Die Anzahl der mitbestimmten Punkte ist also

$$n^2 - \tfrac{1}{2}n(n+3) + 1 = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

Der Satz lautet demnach:

Alle n-iken, die durch $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ feste Punkte gehen, enthalten noch weitere $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ feste Punkte[68]).

---

[68]) Dies ist das sogenannte Cramersche Paradoxon. Schon Euler (Abh. Ak. Berl. 1748) fiel es auf, daß zwei Kurven n^{ter} Ordnung sich in mehr Punkten schneiden, als zur Bestimmung einer derselben notwendig sind. Cramer erörterte darauf in seiner „*Introduction*" dieses Paradoxon ausführlich, konnte aber keinen rechten Grund angeben. Erst nachdem durch Lamé (s. Nr. 12) der Begriff des Kurvenbüschels eingeführt war, gab Plücker, zuerst in einer Note der „*Entwicklungen*", I. Bd., S. 228, den obigen Satz. Die algebraische Seite der Frage behandeln zwei ziemlich gleichzeitige Arbeiten von Jacobi (Journ. f. Math. **15**, 1841, S. 285) und Plücker (ebdt. **16**, 1842, S. 47). Vgl. Plückers „*Algebraische Kurven*", Einleitung. Für das Folgende ist auch eine Arbeit von Gergonne in den Ann. de Math. **17**, 1840, S. 120, grundlegend gewesen.

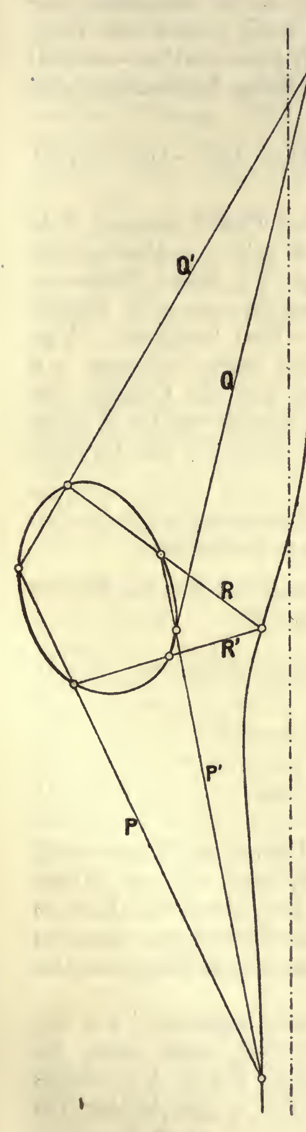


Fig. 46.

Beisp. Schreibt man einer Kubik ein Sechseck ein, dessen erste, dritte, fünfte Seite P, Q, R, dessen zweite, vierte, sechste P′, Q′, R′ sind und schneiden sich P, P′ und Q, Q′ auf der Kurve, so liegt auch der Schnittpunkt von R, R′ auf derselben Kurve. Denn die gegebene Kubik und die zwei zerfallenen Kubiken P, Q, R und P′, Q′, R′ gehen sämtlich durch dieselben 8 Punkte und können daher nur einen einzigen neunten Punkt gemeinsam haben. Ist das Sechseck, wie in Fig. 46, dem Oval einer Kubik einbeschrieben, so liegen die drei übrigen Punkte auf der Serpentine. Deformiert man nun die Kubik allmählich so, daß das Oval sich einem Kegelschnitt, die Serpentine sich ihrer Asymptote nähert, so geht der Satz schließlich in den Pascalschen Lehrsatz über, indem die Kubik in einen Kegelschnitt und eine Gerade zerfällt.

93. Den Satz der vorigen Nummer können wir sofort auf den Schnitt zweier Kurven der m^{ten} und n^{ten} Ordnung ausdehnen $(m < n)$. Auch die mn Schnittpunkte zweier solchen Kurven sind nicht voneinander unabhängig. Wir können die Frage so stellen: *Wieviel von den mn Punkten auf der m-ik C_m darf man willkürlich herausgreifen, so daß eine durch dieselben gelegte n-ik C_n auch durch alle übrigen gehen muß?* Um diese Frage zu beantworten, suchen wir zunächst die Anzahl der Punkte,

die man auf C_m geben muß, damit durch dieselben eine n-ik gehe, die aus der C_m selbst und noch einer Kurve C_{n-m} besteht. Diese letztere läßt sich durch $\frac{1}{2}(n-m)(n-m+3)$ außerhalb C_m gelegene Punkte vollständig bestimmen, also sind auf C_m

$$N = \tfrac{1}{2}n(n+3) - \tfrac{1}{2}(n-m)(n-m+3) = mn - \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) + 1$$

Punkte anzunehmen.

Geben wir nun aber auf C_m einen Punkt weniger, d. h. $(N-1)$ Punkte, so wird durch diese $mn-p$ Punkte [wo p das Geschlecht ist, wenn die Kurve C_m keine Singularitäten besitzt] auf C_m und $\frac{1}{2}(n-m)(n-m+3)$ Punkte außerhalb ein ganzes Büschel von n-iken bestimmt. Von den n^2 Grundpunkten dieses Büschels liegen offenbar mn auf der gegebenen C_m. Nennen wir nun die Gruppe, die eine andere zu einem vollständigen Schnitt zweier Kurven ergänzt, den »Rest« (oder das »Residuum«) der Gruppe, so können wir sagen:

Durch $mn-p$ Punkte einer allgemeinen m-ik $(m<n)$ ist der Rest von p Punkten schon mitbestimmt.

Die Mannigfaltigkeit (Stufe) q des durch die mn Punkte gehenden linearen Systems von n-iken ist

$$\tfrac{1}{2}n(n+3) - mn + \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) = \tfrac{1}{2}(n-m)(n-m+3) + 1,$$

also

$$q = \tfrac{1}{2}(n-m+1)(n-m+2).$$

Die Zahl

$$\varepsilon_n = \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2)$$

heißt man den »n-Exzeß« der mn Punkte auf einer m-ik. Das Merkwürdige an dieser Zahl ist, daß sie von n gar nicht abhängt. Zugleich gibt sie, besonders für Kurven ohne Singularitäten, für die unsere Aufstellungen zunächst gelten, eine direkte geometrische Veranschaulichung der Geschlechtszahl p.

Wenn wir nun unseren Satz auch eigentlich nur für $n>m$ aufstellten, so gilt derselbe doch auch noch für $n=m$. Denn in diesem Falle resultiert der in der vorigen Nummer gegebene Satz. Es wird für $n=m$ in der Tat $q=1$, was dem Büschel entspricht.

Für $n < m$ ist die Sache noch einfacher. Denn die n-ik ist dann durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ der mn Schnittpunkte bereits festgelegt und es sind $\varepsilon_n = mn - \frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte mitbestimmt. ε_n ist in diesem Falle nicht mehr von m allein abhängig. Wir bemerken jedoch, daß für $n = m - 1$ und für $n = m - 2$ die beiden Werte $mn - \frac{1}{2}n(n+3)$ und $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ exakt gleich werden. Daher kann für $n = \begin{cases} m-1 \\ m-2 \end{cases}$ der Satz auch noch in der zuerst angegebenen Form ausgesprochen werden[69]).

Für $n = m - 3$, was in den Anwendungen oft vorkommt, ergibt sich aber schon die Zahl der mitbestimmten Punkte $\varepsilon_n = p - 1$.

Beisp. 1. Geht die C_n $(n > m - 3)$ durch d einfache Singularitäten der C_m, so wird, wenn man die in diesen Punkten mitbestimmten d weiteren Schnittpunkte als selbstverständlich nicht mitzählt $\varepsilon_n = \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - d$. Da diese Zahl aber nicht negativ werden kann, so ergibt sich das bekannte Resultat für die Maximalzahl der einfachen Singularitäten einer m-ik:

$$d \leqq \frac{1}{2}(m-1)(m-2).$$

Beisp. 2. Eine Kubik und eine Quartik schneiden einander in 12 Punkten. Eine allgemeine Quartik ist durch 14 Punkte bestimmt. Dennoch ist es nicht möglich, durch 12 beliebige Punkte auf einer gegebenen Kubik und noch zwei weitere Punkte eine andere Quartik zu legen, als die, die aus der Kubik und der durch die beiden Punkte bestimmten Geraden besteht. Für eine Kubik ist eben der Exzeß $\varepsilon_4 = 1$ und man darf daher nur 11 Punkte auf der Kubik beliebig wählen. Dann ist, wenn man noch ganz beliebig 3 Punkte außerhalb gibt, immer eine Quartik bestimmt, die durch einen zwölften festen Punkt der Kubik hindurchgeht. Die Mannigfaltigkeit dieses Systems von Quartiken ist natürlich $q = 3$, was sich auch aus der Formel ergibt.

Beisp. 3. Eine C_8 hat mit einer C_6 48 Schnittpunkte. Zur Bestimmung einer C_8 sind 44 Punkte nötig. ε_8 ist für eine C_6

---

[69]) Der Satz dieser Nummer gilt unverändert, auch wenn die C_m in eine C_k und eine C_{m-k} zerfällt, wenn nur die C_n nicht durch alle Schnittpunkte der beiden Teilkurven C_k und C_{m-k} geht. Man sehe darüber ZEUTHEN *„Sur la détermination d'une courbe algébrique par des points donnés“*. Math. Ann. **31**, 1888, S. 235—251.

aber gleich 10. Daher ist die Mannigfaltigkeit des C_8-Systems durch 38 beliebige Punkte einer C_6 gleich 6 und alle ∞^6 Kurven des Systems gehen noch durch weitere 10 feste Punkte auf der C_6.

§ 48. Anzahl der Bedingungen für bestimmte Singularitäten.

94. Haben die Kurven, um deren Schnitt es sich handelt, irgend welche außerhalb der Schnittpunkte gelegene Singularitäten, so muß nur für diese die Zahl unabhängiger linearer Bedingungen angegeben werden, worüber eine kurze Bemerkung gleich folgen soll. Wenn aber die Kurven sich in singulären Punkten noch irgendwie durchschneiden sollen, so werden die Verhältnisse komplizierter. Auf jeden Fall kann dann die oben gegebene Zahl p für ε_n nur eine obere Grenze darstellen. Die Schnittpunkte, auch in singulären Stellen, abzuzählen, haben wir ja gelernt. Es erübrigt uns nur, die Anzahl von Bedingungen anzugeben, die einer Kurve dadurch auferlegt sind, daß sie in einem bestimmten Punkt einen k-fachen Punkt haben soll. Die Gleichung einer solchen Kurve (mit k-fachem Punkt im Anfangspunkt) ist bekanntlich

$$x_3^{n-k}\,u^{(k)} + x_3^{n-k-1}\,u^{(k+1)} + \ldots + u^{(n)} = 0\,.$$

Diese Gleichung hat noch $[(k+1)+(k+2)+\ldots+(n+1)]-1$ unabhängige Konstante. Dies ergibt

$$\tfrac{1}{2}(n+k+2)(n-k+1)-1=\tfrac{1}{2}n(n+3)-\tfrac{1}{2}k(k+1)$$

Bedingungen. Also hat der k-fache Punkt $\frac{1}{2}k(k+1)$ Bedingungen absorbiert. Diese Zahl erhält man direkt durch Abzählen der in der Gleichung verloren gegangenen Konstanten. Man kommt aber auf dieselbe Zahl, wenn man den k-fachen Punkt als Grenze von $\frac{1}{2}k(k-1)$ Doppelpunkten betrachtet. Wir denken uns einen Punkthaufen von k Punkten im Anfangspunkt und durch jeden der Punkte einen Zweig, das sind zunächst k Bedingungen. Das Auftreten von $\frac{1}{2}k(k-1)$ Doppelpunkten entspricht ebensovielen Bedingungen. Und in der Tat ist

$$k+\tfrac{1}{2}k(k-1)=\tfrac{1}{2}k(k+1)\,.$$

Berühren sich noch s Zweige des k-fachen Punktes, so ergibt dies weitere s Bedingungen.

Die letztere Überlegung läßt sich mit einiger Vorsicht auf jede Superlinearität übertragen. So erhält man für den Berührungsknoten: Zwei (lineare) Zweige durch den Punkt 2, Berührung der Zweige 1, zwei Doppelpunkte 2, zusammen fünf Bedingungen. Dies kann man durch Abzählen der Konstanten in der allgemeinen Gleichung der Quartik mit Berührungsknoten bestätigen (s. S. 152). Diese Gleichung hat zwar nur acht Konstante; es ist aber zu bedenken, daß dort auch die Richtung der Tangente des Berührungsknotens eine bestimmte war. Für die Schnabelspitze in einem bestimmten Punkt erhält man ebenso sechs Bedingungen und für jede der in Nr. 80 aufgezählten Singularitäten nach ihrer Reihenfolge je eine mehr.

Für den Spitzpunkt ergibt sich: Dreifacher Punkt 6, drei zusammenfallende Tangenten 2, im ganzen acht Bedingungen. Für den Rückkehrflachpunkt, der in Punktkoordinaten dieselben Äquivalente hat wie die Schnabelspitze, erhält man doch, wegen der innigeren Berührung der beiden linearen Zweige (s. die Entwicklung S. 136) eine Bedingung mehr, also sieben.

Soll die Singularität nicht in einem bestimmten Punkt auftreten, sondern nur überhaupt auf der Kurve vorhanden sein, so kommt von der so berechneten Anzahl der Bedingungen die Zahl Δ der linearen Zweige der Superlinearität in Abzug.

§ 49.

Begriff der Korresidualität. Restgleichungen. Der Restsatz.

95. Wir setzen nun die Betrachtungen der Nr. 93 fort, um zu einem Satz zu gelangen, der zu den allerwichtigsten gehört, die wir über Punktgruppen auf Kurven kennen, dem Restsatz. Wir stellen denselben zunächst in einer Form auf, in der er schon GERGONNE und PLÜCKER bekannt war, allerdings nur für $k + l = n$. Dieser vorläufige Satz lautet:

Wenn eine Gruppe von $n(k+l)$ Punkten auf einer Kurve C_n den vollständigen Durchschnitt der C_n mit einer $(k+l)$-ik C_{k+l} bildet und nk dieser Punkte bilden den Durchschnitt der C_n mit einer k-ik, so bilden auch die übrigen nl Punkte den vollständigen Schnitt der C_n mit einer l-ik.

Nach dem oben definierten Begriff des Residuums können wir auch kürzer sagen:

Hat eine Gruppe von $n(k+l)$ Punkten auf einer n-ik ein Null-Residuum und nk dieser Punkte haben gleichfalls ein Null-Residuum, so haben auch die übrigen nl Punkte ein Null-Residuum.

Zum Beweise dieses Satzes ist es freilich nötig, den sogenannten NOETHERschen Fundamentalsatz vorauszusetzen, wegen dessen Begründung wir den Leser auf die Literatur verweisen müssen[70]. Derselbe sagt aus, daß eine Kurve durch den vollständigen Durchschnitt einer C_n und einer C_k in der Form

$$\mathsf{A}\, C_n + \mathsf{B}\, C_k = 0$$

geschrieben werden kann, wo A und B ebenfalls Symbole für Kurven sind, die die Gleichung homogen machen. Wir können demnach in unserem Falle setzen

$$C_{k+l} \equiv \mathfrak{C}_{k+l-n}\, C_n + \mathfrak{C}_l\, C_k \qquad [k+l \geqq n],$$

wo der Frakturbuchstabe $\mathfrak{C}$ andeuten soll, daß die betreffende Kurve nicht zu den gegebenen gehört.

Gemäß dieser Identität ist in allen Punkten, wo zugleich $C_{k+l} = 0$ und $C_n = 0$, identisch auch $C_k\, \mathfrak{C}_l = 0$, und da von $n(k+l)$ Schnittpunkten nk auf der C_k liegen, so liegen die übrigen nl notwendig auf der $\mathfrak{C}_l$, d. h. auf einer bestimmten Kurve l^{ter} Ordnung.

Ist $k+l=n$, so muß man nur $\mathfrak{C}_{k+l-n} = \mathfrak{C}_0 =$ konst. nehmen. Der Satz und sein Beweis gilt aber ebenso für $k+l<n$, wenn nur dann $\mathfrak{C}_{k+l-n} = \mathfrak{C}_{-\nu} = 0$ gesetzt wird, so daß $C_{k+l} \equiv C_k\, C_l$.

Beisp. Schreibt man in einen Kegelschnitt ein $2n$-Eck ein, so liegen sämtliche außerhalb des Kegelschnitts liegenden Schnittpunkte des Systems der 1., 3., ..., $(2n-1)^{\text{ten}}$ Seite mit dem System der 2., 4., ..., $2n^{\text{ten}}$ Seite in einer $(n-2)$-ik. Denn

[70]) Siehe NOETHER *„Über einen Satz aus der Theorie der algebraischen Funktionen“*. Math. Ann. **6**, 1872, S. 351 ff, und mehr geometrisch *„Zum Beweise des Satzes etc.“*, Math. Ann. **40**, 1892, S. 140—145. Die Gültigkeit des Satzes unterliegt gewissen Bedingungen, wenn die C_n und C_k sich in vielfachen Punkten schneiden. Sind diese erfüllt, so gelten auch alle Sätze über Schnittpunkte, selbst wenn solche in singuläre Punkte fallen.

jedes dieser Systeme bildet eine n-ik und es gibt außerhalb des Kegelschnitts noch $n^2 - 2n = n(n-2)$ Schnittpunkte. Diese müssen, da die ersteren $2n$ auf dem Kegelschnitte liegen, nach dem eben bewiesenen Satz einer $(n-2)$-ik angehören. Für das eingeschriebene Sechseck ergibt sich wiederum der Pascalsche Satz, für das Achteck liegen außerhalb noch 8 Schnittpunkte, die einem Kegelschnitt angehören.

96. Wenn wir die beiden Teilgruppen von nk und nl Punkten der vorigen Nummer mit G_{nk} und G_{nl} bezeichnen, und die Tatsache, daß eine Gruppe G ein Null-Residuum hat, durch die symbolische Gleichung $G \eqsim 0$[70a]) [gelesen: G hat dasselbe Residuum wie 0, ist »korresidual« (äquivalent) zu 0] ausdrücken, so können wir den Satz der vorigen Nummer in folgender Weise fassen:

Von den drei Restgleichungen

$$G_{nk} \eqsim 0, \quad G_{nl} \eqsim 0, \quad G_{nk} + G_{nl} \eqsim 0$$

ist jede die Folge der beiden anderen.

Dies führt uns zu der Vermutung, es ließen sich diese Restgleichungen ebenso addieren und subtrahieren, wie gewöhnliche Gleichungen. Wir können die eben angeschriebenen drei Gleichungen auch sofort etwas allgemeiner fassen. Wenn

$$M + Q \eqsim 0 \text{ und } N + Q \eqsim 0,$$

wo M, N, Q Punktgruppen auf irgend einer Kurve sind, so folgt daraus formell

$$M \eqsim N \text{ oder } M - N \eqsim 0,$$

wovon das erstere nach unserer Definition bedeutet: M ist korresidual zu N; dies ist aber tatsächlich richtig, da M und N das gemeinschaftliche Residuum Q haben. Die Gleichung $M - N \eqsim 0$ müssen wir deshalb mit $M \eqsim N$ als identisch betrachten.

Ist ferner außerdem auch $M' \eqsim N'$ mit R als gemeinsamem Residuum, so folgt

$$M + M' \eqsim N + N',$$

[70a]) Das Zeichen „$\eqsim$“ für „korresidual“ habe ich mir gestattet einzuführen, da das Gleichheitszeichen selbst nicht recht am Platze ist und das Zeichen „$\equiv$“, das z. B. Bertini verwendet, doch schon genug andere Bedeutungen hat.

denn $Q + R$ ist ein gemeinschaftliches Residuum zu beiden. Ebenso ergibt sich

$$M + N' \equiv M' + N,$$

wofür man auch

$$M - M' \equiv N - N'$$

schreiben kann, als richtig.

Haben wir weiter eine Gleichung der Form $L + M - L \equiv N$, so bedeutet dies soviel wie $L + M \equiv L + N$ und diese ist offenbar mit $M \equiv N$ identisch.

Wir können also tatsächlich auf Restgleichungen die Fundamentalgesetze der Addition und Subtraktion anwenden.

Dieses Prinzip führt uns sofort zu dem eigentlichen, von Brill-Noether[71]) aufgestellten Restsatz. Denken wir uns vier Punktgruppen auf irgend einer Kurve Q, R, Q', R' und es sei

$$Q + R \equiv 0, \quad Q + R' \equiv 0, \quad Q' + R \equiv 0,$$

so folgt aus der ersten und dritten Gleichung sofort $Q \equiv Q'$ und wenn man dies in die zweite Gleichung substituiert, ergibt sich $Q' + R' \equiv 0$. D. h. mit Worten:

Sind zwei Punktgruppen R und R' korresidual mit dem gemeinschaftlichen Residuum Q und ist Q' irgend ein anderes Residuum von R, so ist Q' auch residual zu R'; R und R' sind also auch korresidual in bezug auf Q' und überhaupt in bezug auf jedes Residuum der einen von den beiden Gruppen R bez. R'.

Dies ist der Brill-Noethersche Restsatz, dessen fundamentale Bedeutung darin liegt, daß er die Punktgruppen auf einer Kurve individualisiert, indem die Schnittkurven und deren Ordnung vollständig außer Betracht bleiben. Er

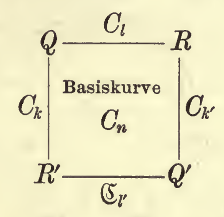
---

[71]) S. die berühmte Abhandlung *„Über die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie"*. Math. Ann. 7, 1874, S. 269—310. Diese Abhandlung wurde grundlegend für eine neue, die sogenannte »geometrisch-algebraische« Richtung in der Theorie der algebraischen Funktionen, die allerdings durch die Gergonne-Plückerschen Sätze und durch Arbeiten von Clebsch und Gordan schon vorbereitet war. S. den Brill-Noetherschen *Bericht*[12]).

bildet die Grundlage einer Geometrie der Punktgruppen auf einer Kurve f, deren gegenseitige Beziehungen bei irgendwelcher ein-eindeutigen Transformation von f invariant sind.

§ 50. Erweiterung des Restsatzes. Beispiele. Begriff der Spezialgruppen.

97. Der direkte Beweis dieses Restsatzes stützt sich auf eine ganz ähnliche Identität, wie sie zu dem Beweis des Satzes von Nr. 95, der jetzt als spezieller Fall des Restsatzes erscheint, verwendet wurde. Wir können den Restsatz schematisch durch folgendes Diagramm darstellen:



Daraus läßt sich die Identität direkt ablesen, indem wir zur Ergänzung noch eine Kurve $\mathfrak{C}_{n'}$ einführen:

$$C_k C_{k'} \equiv C_n \mathfrak{C}_{n'} + C_l \mathfrak{C}_{l'} . \tag{1}$$

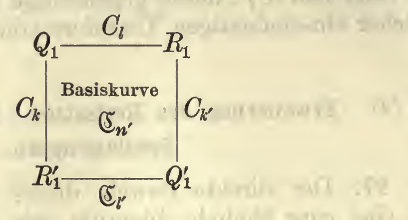
Dabei müssen die Ordnungen der sechs Kurven nur der Gleichung genügen

$$k + k' = l + l' = n + n' . \tag{2}$$

Bem. Soweit die Identität (1) Gültigkeit hat, gilt auch der Restsatz. Dies ist nun besonders (nicht ausschließlich) der Fall, wenn die Kurven C_k, $C_{k'}$, C_l, $\mathfrak{C}_{l'}$ sich »adjungiert« zu C_n verhalten, d. h. durch jeden k-fachen Punkt $(k-1)$-mal hindurchgehen. Bei Sätzen über Punktgruppen spielen deshalb adjungierte Kurven eine Hauptrolle. Wir müssen es uns aber versagen näher auf diese Verhältnisse einzugehen.

In der Identität (1) ist noch eine bis jetzt ganz unberücksichtigt gebliebene Kurve $\mathfrak{C}_{n'}$, der wir genau dieselbe Rolle zuweisen können wie C_n. Denn die Kurven C_k, C_l, $C_{k'}$, $\mathfrak{C}_{l'}$ durchschneiden sich noch in vier weiteren Punkt-

gruppen Q_1, R_1, Q_1', R_1', die zufolge der Identität (1) auf $\mathfrak{C}_{n'}$ liegen und dem folgenden Diagramm genügen:



Schreiben wir demnach die NOETHERsche Identität in der symmetrischen Form

$$C_k C_{k'} + C_l C_{l'} + C_n C_{n'} = 0 \,, \tag{3}$$

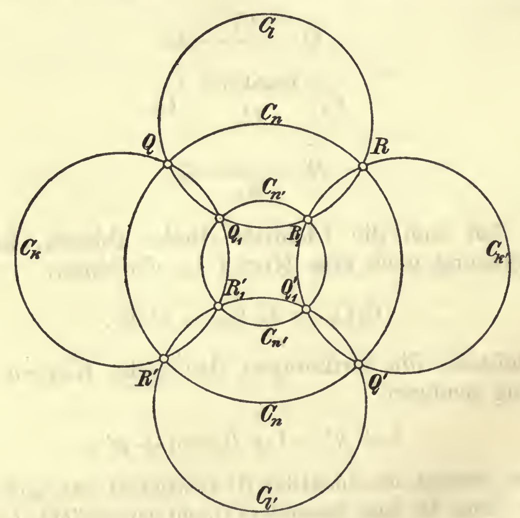


Fig. 47.

so erkennen wir, falls wir von singulären Kurven absehen, die vollständige Gleichberechtigung aller sechs Kurven, auf deren jeder vier Punktgruppen liegen, die dem BRILL-NOETHERschen Restsatz genügen[72]). Wir würden dieses

[72]) Aus dieser Erweiterung des Restsatzes fließen eine Menge von Sätzen. Vgl. STUDY *„Über Schnittpunktfiguren ebener algebraischer Kurven"*. Math. Ann. **36**, 1890, S. 216—229.

Verhalten am besten zum Ausdruck bringen, wenn wir die beiden Quadrate unserer Diagramme als Grund- und Deckfläche eines Würfels nähmen. Dann würden die acht Punktgruppen ohnehin in den Ecken stehen und die sechs Kurven müßten entsprechend auf die sechs Seitenflächen geschrieben werden.

Die Fig. 47 stellt den Sachverhalt ebenfalls sehr übersichtlich dar. Es ist nur jede Kurve durch einen Kreis ersetzt und jede Punktgruppe besteht bloß aus einem einzigen Punkt. Man kann dann, statt von einer Grundkurve auszugehen, auch von einer der Punktgruppen ausgehen und den Satz etwa in folgender Weise aussprechen:

Gehen drei algebraische Kurven C_k, C_l, C_n durch dieselbe Punktgruppe Q und schneiden sich dieselben außerdem paarweise in den Gruppen Q_1, R', R, so kann man noch in mannigfacher Weise drei andere Kurven $C_{k'}$, $C_{l'}$, $C_{n'}$ angeben, deren Ordnungen nur den Gleichungen (2) zu genügen haben, die einzeln bez. durch die Gruppen Q_1, R', R gehen, die ferner paarweise auf C_k, C_l, C_n dieselben Reste R_1', R_1 und Q' ergeben und deren sämtliche übrigen Schnittpunkte eine einzige Punktgruppe Q_1' bilden.

Beisp. Drei Kegelschnitte durch dieselben zwei Punkte I und J schneiden sich noch außerdem in drei Punktepaaren. Die Verbindungsgeraden dieser drei Punktepaare laufen durch einen Punkt.

Dieser Satz ist eine projektive Verallgemeinerung des bekannten Satzes, daß die drei Chordalen dreier Kreise sich in einem Punkte schneiden. Denn die beiden Punkte I und J lassen sich durch lineare Transformation in die imaginären Kreispunkte überführen.

98. Wir möchten diesen Gegenstand nicht verlassen, ohne noch an einem speziellen Beispiel die in Nr. 96 erwähnte, durch den Brill-Noetherschen Restsatz bewirkte Individualisierung der Punktgruppen, resp. der korresidualen Scharen von solchen, ganz deutlich gemacht zu haben. Zu diesem Zwecke betrachten wir eine C_5 mit zwei Doppelpunkten ($p = 4$). Um sie mit einem adjungierten Kegelschnitte C_2 zu schneiden, nehmen wir außer den beiden Doppelpunkten noch eine Gruppe G_3 von drei beliebigen

Punkten auf der Kurve an, durch die dann C_2 vollständig festgelegt ist und $5 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 3 = 3$ weitere Schnittpunkte auf C_5 mitbestimmt werden. Lassen wir nun von G_3 einen Punkt variieren, d. h. nehmen wir nur eine G_2 als fest und legen durch diese und die beiden Doppelpunkte ein Büschel von Kegelschnitten, so ist dadurch eine einfach unendliche (lineare) Schar $g_4^{(1)}$ — wo das (1) im Exponenten die Mannigfaltigkeit anzeigt — von Gruppen G_4 auf C_5 definiert, die alle untereinander in bezug auf die angenommene G_2 korresidual sind. Wenn wir nun durch irgend eine solche G_4 eine adjungierte C_3 legen, so schneidet diese die C_5 noch in $5 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 4 = 7$ Punkten, die eine zur G_2 in bezug auf G_4 korresiduale Gruppe G_7 bilden. Der Restsatz sagt nun aus, daß man durch diese G_7 ein ganzes Büschel von adjungierten Kubiken legen kann (wiewohl neun Punkte gegeben sind), die auf C_5 dieselbe Schar $g_4^{(1)}$ von Punktgruppen G_4 ausschneiden, die vorhin durch das Kegelschnittbüschel bestimmt wurde. Die korresiduale Schar $g_4^{(1)}$ ist also von einem speziellen Residuum vollständig unabhängig, etwas ganz Selbständiges, und geht durch jede rationale Transformation wieder in eine ebensolche Schar $\gamma_4^{(1)}$ auf der transformierten Kurve über.

Dieselbe Kurve C_5 mit zwei Doppelpunkten können wir aber gebrauchen, um noch etwas anderes, das für den weiteren Ausbau der Theorie der Punktgruppen von fundamentaler Wichtigkeit ist, zu demonstrieren. Wir sahen soeben, daß durch drei feste Punkte auf C_5 3 $(= p - 1)$ weitere Schnittpunkte mit einem adjungierten Kegelschnitt, entsprechend dem Satze von Nr. 93 mitbestimmt waren. Nehmen wir aber die drei Punkte der gegebenen Punktgruppe G_3 so an, daß sie mit einem der Doppelpunkte auf einer Geraden G liegen, so ist durch diese drei Punkte und die beiden Doppelpunkte nicht ein Kegelschnitt, sondern ein ganzes Büschel von solchen (allerdings zerfallenen) bestimmt, die sämtlich G als Bestandteil enthalten und deren zweiter Bestandteil dem Büschel von Geraden durch den zweiten Doppelpunkt angehört. Die Punktgruppe G_3 ist also derart spezialisiert, daß sie die drei weiteren Punkte nicht festlegt. Dieselben bilden vielmehr noch eine $g_3^{(1)}$, die von dem Geradenbüschel durch den zweiten Doppelpunkt ausgeschnitten wird. Man heißt infolgedessen die Gruppe G_3

in dem vorliegenden Falle eine »Spezialgruppe« und die Schar $g_3^{(1)}$ eine »Spezialschar« und wir müssen bei all unseren Schnittpunktsätzen, wenn sie richtig sein sollen, auch noch annehmen, daß die fest gegebene Punktgruppe nicht eine Spezialgruppe ist. Denn es läßt sich der Nachweis erbringen, daß sich überhaupt auf jeder n-ik, für die nur $n \geqq 5$ ist, Spezialgruppen befinden[73]).

Die mitgeteilten Schnittpunktsätze ergeben indessen so reiche Anwendungen, besonders auf Kurven 3. Ordg., wo Spezialgruppen noch gar nicht auftreten können, daß wir, bevor wir zu neuen Untersuchungen übergehen, diesen Anwendungen einen eigenen Abschnitt widmen wollen.

---

[73]) Durch die Untersuchung dieser Spezialgruppen erhalten alle Schnittpunktsätze erst eine sichere Grundlage. Plücker fügte seinen Sätzen immer bei, die gegebene Punktgruppe solle ganz »beliebig« oder »allgemein gelegen« sein, da er die Ausnahmen wohl sah, aber nicht anzugeben vermochte. Dies wurde erst von Brill-Noether in der zitierten Abhandlung geleistet. Wir sind leider durch den Raum gezwungen, uns auf diese Andeutungen zu beschränken, verweisen aber den Leser, abgesehen von der Darstellung bei Clebsch-Lindemann, noch auf zwei neuere Arbeiten, die den Gegenstand im Zusammenhange behandeln: E. Bertini *„La geometria delle serie lineari sopra una curva piana secondo il metodo algebrico."* Ann. di mat. (2) **22**, 1894, S. 1—40 und F. S. Macaulay *„Point-Groups in relation to Curves"*, Proc. Lond Math. Soc. **26**, 1895, S. 495—544. — Es sei auch noch angemerkt, daß die Definition und alle Sätze über Spezialgruppen nur für den Schnitt mit adjungierten $(n-3)$-iken gelten, da nur für diese die Schnittpunktsysteme gegenüber eindeutiger Transformation invarianten Charakter zeigen.

ABSCHNITT XI.

ANWENDUNGEN DER SÄTZE ÜBER SCHNITTPUNKTSYSTEME.

§ 51. Sätze über den Schnitt von zwei Kubiken. Begleiterin einer Geraden. Gerade durch drei Wendepunkte. Begleitender Kegelschnitt.

99. Wir wissen aus Nr. 92, daß es zu acht ganz willkürlichen Punkten der Ebene immer e i n e n neunten Punkt gibt, so daß durch diese neun Punkte nicht eine, sondern ein ganzes Büschel von Kubiken geht. In der Tat ist es gelungen, diesen Punkt auch linear zu konstruieren, worauf wir nicht eingehen können[74]). Wenn es uns aber nur darauf ankommt, überhaupt neun Punkte der gewünschten Beschaffenheit anzugeben, so können wir dies leicht bewerkstelligen, indem wir zwei zerfallene Kubiken zum Schnitt bringen. Bestehe die eine Kubik etwa aus den Geraden P, Q, R, die andere aus den Geraden P', Q', R' und seien diese Buchstaben zugleich Symbole für die Gleichungen der Geraden, so lautet das Büschel durch die neun Schnittpunkte dieser zwei zerfallenen Kubiken

$$P'Q'R' + \lambda PQR = 0 .$$

[74]) Siehe Hart in Cambr. u. Dubl. Math. J. 6, 1851, S. 181 ff. — Die Konstruktion ist auch bei Cremona, § 12, aber nicht linear ausgeführt. — Solche neun Punkte, durch die ein Büschel von Kubiken geht, heißt man auch »a s s o z i i e r t e P u n k t e«.

Aus dieser Konfiguration der neun Schnittpunkte, die wir hier schematisch dargestellt haben, kann man Verschiedenes ablesen. Z. B. den Satz:

Sind 1, 2, 3 drei in gerader Linie liegende Punkte einer Kubik, ebenso 4, 5, 6 und schneiden die Verbindungslinien 1-4, 2-5, 3-6 die Kurve in den Punkten 7, 8, 9, so liegen auch 7, 8, 9 in einer Geraden.

Denn, um dies direkt zu zeigen, P′Q′R′ bildet eine Kubik, die mit der gegebenen die angedeuteten neun Punkte gemein hat; durch acht dieser Punkte geht auch die Kubik, die aus P, Q und der Linie *7-8* besteht; demnach muß die letztere auch durch den Punkt *9* gehen.

Oder Folgendes: Liegen vier Punkte *4, 8, 6, 2* derart auf einer Kubik, daß die Linien *4-6* und *2-8* sich in einem Punkte *5* der Kurve schneiden, so kann man ∞^1 Quadrupel von vier Punkten *1, 7, 9, 3* so auf der Kurve bestimmen, daß die Verbindungslinien *1-7, 7-9, 9-3, 3-1* durch die Punkte *4, 8, 6, 2* bez. gehen, indem man etwa den Punkt *1* die ganze Kurve durchlaufen läßt; anders ausgedrückt:

Von jedem Punkte (1) der Kurve ausgehend läßt sich durch die vier Punkte 4, 8, 6, 2 ein Vierseit legen, das der Kurve eingeschrieben ist und sich im Punkte (1) wieder schließt.

Dies ist ein spezieller Fall eines Steinerschen Polygons [75].

100. Lassen wir nun die Geraden P und Q zusammenrücken, so werden schließlich P′, Q′, R′, Tangenten in den Punkten *1(4), 2(5), 3(6)* und *7, 8, 9* sind die bezüglichen Tangentialpunkte. Wir erhalten so den Satz:

Liegen drei Punkte 1, 2, 3 einer Kubik in einer Geraden P, *so liegen die drei zugehörigen Tangentialpunkte 7, 8, 9 ebenfalls in einer Geraden* R, *die man die »Satellitgerade« oder »Begleiterin« der Geraden* P *nennt.*

---

[75]) Siehe darüber Steiner, Journ. f. Math. **32**, 1846, S. 182 und Clebsch, ebenda **63**, 1864, S. 94. Für rationale Kubiken Loria S. 28.

Die Gleichung der Kubik kann in der Form geschrieben werden

$$P'Q'R' + \lambda P^2 R = 0 .$$

Der Satz von Nr. 51, daß die Kubik ihre drei Asymptoten in drei Punkten einer Geraden schneidet, ist hiervon nur ein spezieller Fall. Jede Kurve dritter Ordnung läßt sich daher in die Form bringen

$$P'Q'R' + \lambda R = 0 .$$

Hier sind P', Q', R' die Asymptoten und R ist die Begleiterin der unendlichfernen Geraden (s. Fig. 48).

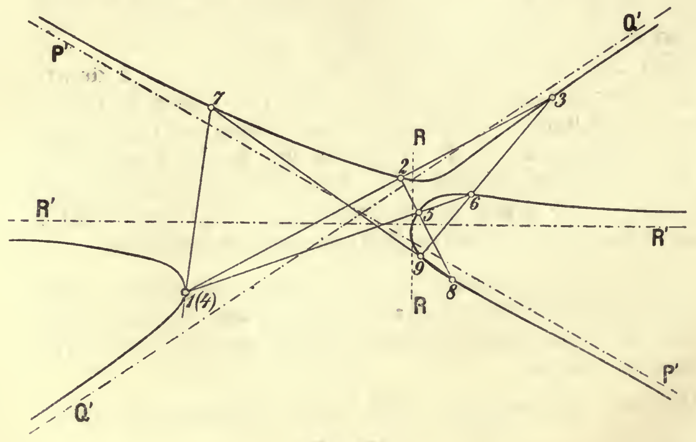


Fig. 48.

Sind nun etwa die Punkte *1* und *2* auch noch Wendepunkte, so fallen ihre Tangentialpunkte *7* und *8* mit *1* und *2* selbst zusammen und auch die Gerade R koinzidiert dann mit P und Q. Daraus folgt, daß auch der dritte Punkt *3* ein Wendepunkt ist. Aus dieser wichtigen Tatsache werden wir im nächsten Abschnitt die merkwürdigen Eigenschaften des Systems der neun Wendepunkte ableiten. Wir stellen hier zunächst den fundamentalen Satz (von De Gua) auf:

Jede Gerade durch zwei Wendepunkte einer Kubik enthält noch einen dritten Wendepunkt.

Die Gleichung der Kurve läßt sich in die Form bringen

$$P'Q'R' + \lambda P^3 = 0 .$$

Wenn $P \equiv z$, wenn also etwa die drei reellen Wendepunkte im Unendlichen liegen, so lautet die Gleichung

$$P'Q'R' = \varkappa \qquad (\varkappa = -\lambda) .$$

101. Wir können aber die Punkte *1, 2, 3, 4, 5, 6* auch auf einem nicht zerfallenen Kegelschnitt K annehmen. Dann liegen ebenso die Punkte *7, 8, 9,* die man durch die Verbindungslinien *1-4, 2-5, 3-6* erhält, in einer Geraden R. Gibt man K eine so spezielle Lage, daß er die Kubik in den drei Punkten *1(4), 2(5), 3(6)* berührt, so hat man den Satz:

Berührt ein Kegelschnitt K *eine Kubik in drei verschiedenen Punkten 1, 2, 3, so liegen die Tangentialpunkte 7, 8, 9 dieser drei Punkte in einer Geraden* R.

Über die Umkehrung dieses und eines Teils der vorhergehenden Sätze sehe man die nächsten Nummern. Wir wollen K zunächst wieder allgemein nehmen und legen in allen sechs Schnittpunkten die Tangenten an die Kubik. Da diese eine zerfallene Kurve sechster Ordnung bilden, schneiden sie die Kubik im ganzen in $6 \cdot 3$ Punkten. Davon liegen aber $(6 \cdot 2 =) 4 \cdot 3$ auf dem doppelt gezählten Kegelschnitt K, also müssen die übrigen $2 \cdot 3 = 6$ Schnittpunkte, d. h. die Tangentialpunkte der Punkte *1, 2, 3, 4, 5, 6* wieder einem Kegelschnitt angehören. Es ist ein spezieller Fall dieses allgemeinen Satzes, daß die sechs Tangenten, die von einem Punkte A an die Kubik gehen und die ja in sechs Punkten eines Kegelschnittes K_2 (des Polarkegelschnittes von A) berühren, die Kurve noch weiter in sechs Punkten eines Kegelschnittes K_1 schneiden. Wir erinnern, daß wir die Gleichung dieses Kegelschnittes schon in Nr. 16 aufstellten, wo sich zugleich ergab, daß die gerade Polare von A in bezug auf die Kubik sowohl als auch in bezug auf K_1 und K_2 dieselbe Gerade G ist, K_1 und K_2 sich also in den Schnittpunkten mit dieser Polaren (doppelt) berühren. Wir bemerken noch, daß man K_1 den »begleitenden oder Satellitkegelschnitt« von K_2 nennt.

Beisp. Auf ganz andere Weise erhält man neun nicht unabhängige Punkte für eine Kubik durch die $6 + 3$ Ecken eines

demselben Kegelschnitt K umgeschriebenen vollständigen Vierseits und Dreiseits. Denn greift man aus dem Vierseit irgend ein Dreiseit heraus, so daß noch eine Gerade G übrig bleibt, so liegen die sechs Ecken der so entstandenen zwei Dreiseite, da sie beide demselben Kegelschnitt K umgeschrieben sind, auf einem neuen Kegelschnitt *K* (s. etwa Salmon-Fiedler, *Kegelschnitte*, § 298, Beisp. 8) und die neun Eckpunkte sind auf *K* und G verteilt. Da man aber diese Verteilung auf vier Arten ausführen kann, ist unsere Behauptung bewiesen.

§ 52. **Umkehrungen der vorausgegangenen Sätze.**

102. Es obliegt uns nun, mehrere Sätze der vorausgehenden Nummern umzukehren. Nehmen wir zuvörderst drei Punkte *7, 8, 9* in einer Geraden und auf der Kubik an und ziehen durch jeden Punkt eine beliebige Gerade bez. P′, Q′, R′, so schneidet jede dieser Geraden die Kubik noch in zwei Punkten bez. *1, 4; 2, 5; 3, 6* und diese sechs Punkte müssen auf einem Kegelschnitt, der natürlich auch zerfallen kann, liegen.

Legen wir nun aber durch *7, 8, 9* je irgend eine Tangente an die Kubik, so liegen die bez. Berührungspunkte *1(4)*, *2(5)*, *3(6)* auf einem Kegelschnitt, der die Kubik in denselben Punkten berührt oder aber auf einer Geraden, die dann als ein in eine Doppelgerade ausgearteter Kegelschnitt aufzufassen ist. Da aber von jedem der Punkte *7, 8, 9* je vier Tangenten an die Kubik gehen, so erfordern diese Verhältnisse eine eingehendere Untersuchung. Bezeichnen wir die zwölf Berührungspunkte folgendermaßen

$$\begin{array}{lllll} (7) \;\ldots & 1^a & 1^b & 1^c & 1^d \\ (8) \;\ldots & 2^a & 2^b & 2^c & 2^d \\ (9) \;\ldots & 3^a & 3^b & 3^c & 3^d \end{array}$$

so gibt es $4^3 = 64$ Kombinationen der Punkte zu dreien von der Art $1^a\, 2^b\, 3^c$, so daß in jeder Kombination alle drei Ziffern vorkommen. Nun kann man etwa den Punkt 1^a mit jedem der Punkte 2^a, 2^b, 2^c, 2^d verbinden und jede dieser Verbindungslinien trifft die Kubik in einem zur Gruppe (9)

gehörigen Punkte[76]). So gehen durch jeden der zwölf Punkte vier Gerade; da aber auf jeder Geraden drei Punkte liegen, wird jede dreimal gezählt und es gibt im ganzen nur $\frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 12 = 16$ Verbindungslinien. Alle übrigen 48 Kombinationen entsprechen dreifach berührenden Kegelschnitten. Auch diese Zahl erhält man direkt, indem zu jedem Paar (etwa 1^a-2^a) drei, zu jedem einzelnen Punkt also zwölf Kegelschnitte gehören. Im ganzen ergeben sich demnach $\frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 12 = 48$.

Greifen wir einen dieser Kegelschnitte heraus und seien seine Berührungspunkte etwa 1^a, 2^a, 3^b, so ist klar, daß, wenn wir auf der Kubik die Punkte *7* und *8* sich nähern lassen, der Kegelschnitt sich allmählich so verschiebt, daß die zwei Berührungspunkte 1^a und 2^a zu einer vierpunktigen Berührung zusammenrücken. Gleichzeitig fallen dann aber auch die drei übrigen Punkte 1^b, 1^c, 1^d mit je einem andern aus der Gruppe (8) zusammen und es entstehen so $4 \cdot 3 = 12$ solche Kegelschnitte für jede Tangente der Kubik. Dieses Ergebnis kann man auch umgekehrt fassen und sagen:

In dem Büschel aller Kegelschnitte, die eine Kubik in einem Punkte 1^a (2^a) vierpunktig berühren, sind drei Individuen, die die Kubik noch anderswo, etwa in den Punkten 3^b, 3^c, 3^d zweipunktig berühren.

Diese Punkte erhält man, indem man zu 1^a den Tangentialpunkt *7* (8) und zu diesem wiederum den Tangentialpunkt *9* [d. i. den »zweiten Tangentialpunkt« zu 1^a] bestimmt und von dort die Tangenten an die Kubik legt. Der Berührungspunkt der einen fällt mit *7* (*8*) zusammen, die anderen drei sind die Punkte 3^b, 3^c, 3^d.

Bem. In einem Punkte *1* einer Kubik die Tangente zu ziehen, ist eine lineare Aufgabe, die man löst, indem man die Konfiguration von Nr. 99 benützt. Lassen wir *1* mit *4* zusammenfallen und legen *1-2-3* und *4-5-6* beliebig (s. Fig. 48), so geben die Linien *2-5* und *3-6* zwei Punkte *8, 9,* deren Verbindungslinie den Tangentialpunkt *7* von *1*(*4*) ausschneidet.[77])

[76]) Durch zweckmäßige Verbindung obiger Symbole gelingt es, die gleich zu erwähnenden 16 Verbindungslinien wirklich anzugeben. Hierüber, wie über jede weitere Ausführung zu diesem und dem folgenden Abschnitt s. Durège (L. V.).

[77]) Sporer, Zeitschr. f. Math. **37**, 1892, S. 191.

103. Auch die Geraden bilden in diesem Falle eine eigentümliche Konfiguration, die sich noch ziemlich leicht übersehen läßt. Wir haben sie in Fig. 49 dargestellt. Von den 16 Linien scheiden wir vier sofort aus, nämlich die Tangenten in den Punkten 1^i $(i = a, b, c, d)$, die sämtlich durch

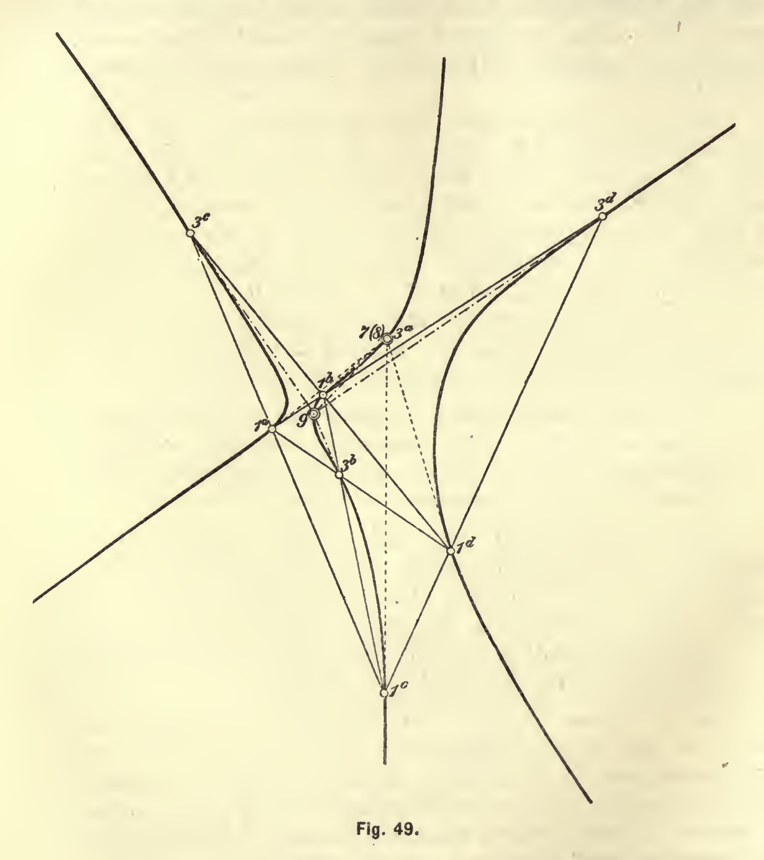


Fig. 49.

$7\,(8)$ gehen, in welchen Punkt wir auch 3^a fallend annehmen. Dann muß aber jede der Verbindungslinien 1^i-1^k durch einen Punkt 3^j $(j \neq a)$ gehen, da in jedem Punkt 1^i zugleich ein bestimmter Punkt der Gruppe (8) enthalten ist. Da aber die vier Punkte 1^i nur sechs Verbindungslinien haben und

nur drei Punkte 3^j vorhanden sind, so kann dies nur in der Weise geschehen, daß die drei Punkte 3^b, 3^c, 3^d die Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks $1^a 1^b 1^c 1^d$ sind. Jede dieser sechs Linien ist doppelt zu zählen, so daß wir über den Verlauf aller 16 Linien unterrichtet sind. Wir wollen das Ergebnis dieser Untersuchung noch in folgendem Satz zusammenfassen:

Zieht man aus einem Kurvenpunkte (9) die vier Tangenten an die Kubik mit den Berührungspunkten 3^a, 3^b, 3^c, 3^d und aus einem derselben (3^a) aufs neue vier Tangenten mit den Berührungspunkten 1^a, 1^b, 1^c, 1^d, so sind die drei anderen Punkte 3^b, 3^c, 3^d Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks $1^a 1^b 1^c 1^d$.

Wir wollen aber noch die letzte Konsequenz unseres Verfahrens ziehen und auch den Punkt *9* mit *7* und *8* zusammenfallen lassen. Dann ist dieser Punkt ein Wendepunkt. Für den ursprünglich dreifach berührenden Kegelschnitt sind sämtliche drei Berührungspunkte zu einer sechspunktigen Berührung zusammengerückt und wir können sagen:

In jedem der drei Punkte, in denen die Tangenten aus einem Wendepunkt einer Kubik die Kurve berühren, kann ein Kegelschnitt mit sechspunktiger Berührung konstruiert werden. Solcher sextaktischen Punkte (vgl. Nr. 91, Beisp. 3) *gibt es, entsprechend den neun Wendepunkten $9 \cdot 3 = 27$ auf jeder Kubik.*

Aufgabe 1. Man zeige, daß jede Gerade durch einen Wendepunkt der Kubik auf dieser noch zwei Punkte ausschneidet, in denen ein Kegelschnitt die Kubik je dreipunktig berührt (oskuliert).

Aufgabe 2. Man konstruiere zu einem Punkte P der Kubik linear den Punkt Q, in welchem ein in P fünfpunktig berührender Kegelschnitt die Kubik noch schneidet und bestimme sodann die Zahl 16 der fünfpunktig berührenden Kegelschnitte, die durch jeden Punkt Q der Kubik gehen, direkt (vgl. Nr. 91, Beisp. 3).

104. Wir können auch — indem wir uns noch einmal auf Fig. 49 beziehen — die aus den Punkten 1^a, 1^b, 1^c, 1^d, 3^c, 3^d gebildete Figur als vollständiges Vierseit auffassen, das der Kubik eingeschrieben ist. Dasselbe hat in dem vorliegenden Falle, da die vier Punkte 1^i einen gemeinschaftlichen Tangentialpunkt haben, die spezielle Lage, daß

die Diagonalen 1^a-1^d und 1^b-1^c sich auch auf der Kurve (in 3^b) schneiden. Setzen wir dies für einen Augenblick nicht voraus und fragen dann nach den Schnittpunkten der Tangenten in den Gegenecken $1^a 1^d$; $1^b 1^c$; $3^c 3^d$ dieses Vierseits! Greifen wir etwa $3^c 3^d$ heraus und ziehen in diesen Punkten die Tangenten, die je noch durch einen benachbarten Punkt 3^γ, 3^δ der Kurve gehen, so können wir die Figur $1^c 3^d 3^\delta 1^b 3^c 3^\gamma$ als ein der Kubik eingeschriebenes Sechseck auffassen, von dem zwei Paare von Gegenseiten, nämlich 1^c-3^d und 1^b-3^c; 3^δ-1^b und 3^γ-1^c sich auf der Kurve (in 1^d und 1^a) schneiden. Nach einem von uns schon in anderer Weise verwerteten Satz (s. Nr. 92, Beisp.) müssen sich dann auch die beiden anderen Seiten 3^d-3^δ und 3^c-3^γ auf der Kurve schneiden (in 9). In derselben Weise erhält man für den Schnittpunkt der Tangenten in 1^a und 1^d einen Punkt 7, für den Schnittpunkt der Tangenten in 1^b und 1^c einen Punkt 8 der Kurve. Diese drei Punkte 7, 8, 9 müssen aber auf einer Geraden liegen, da sie Tangentialpunkte sind zu drei in einer Geraden liegenden Punkten (etwa 1^c, 1^d, 3^d) der Kurve.

Indem wir wieder zu dem gezeichneten Spezialfall zurückkehren, ist es offenbar, daß hier 7 und 8 zusammenfallen müssen und die Gerade 7-8-9 in $7(8)$ Tangente an die Kurve wird. Fiele auch 9 noch in $7(8)$, so wäre dieser Punkt ein Wendepunkt; es würde noch 1^a mit 3^d, 1^c mit 3^b und 1^d mit 3^c koinzidieren und diese drei Punkte lägen auf einer Geraden. Diese Gerade wäre dann nichts anderes als die harmonische Polare des Punktes 9 (s. Nr. 31, Beisp. 2).

§ 53. **Die Lürothschen Kurven.**

105. Nehmen wir zu einem Vierseit noch eine Gerade hinzu, so erhält man ein Fünfseit mit zehn Ecken, durch die sich sicher eine Quartik legen läßt. Daß dies keine allgemeine sein kann, hat LÜROTH[78]) bemerkt, worauf wir jedoch nicht eingehen wollen. Über diese LÜROTHschen Quartiken, die also geometrisch dadurch definiert sind, daß

[78]) S. Math. Ann. **1**, 1869, S. 37—53 und noch ebd. **13**, 1878, S. 548 ff.

sich ihnen ein vollständiges Fünfseit einbeschreiben läßt, gibt es aber einen sehr merkwürdigen Satz, der sich mit den hier zu gebrauchenden Hilfsmitteln beweisen läßt. Derselbe lautet:

Jeder Lürothschen Kurve lassen sich unendlich viele vollständige Fünfseite einschreiben, die alle demselben Kegelschnitt umgeschrieben sind.

Sei K dieser Kegelschnitt (Kreis) und das eine Fünfseit, von dem wir der Definition nach ausgehen, das in Fig. 50 dargestellte mit den zehn Ecken A, B, C, A', B', C', P, Q, R, S. Greifen wir aus demselben eine Seite (PS) heraus, und legen durch deren vier Schnittpunkte P, Q, R, S mit der Kurve irgend welche gerade Linien, so schneiden diese die Quartik noch in zwölf Punkten, die auf einer Kubik liegen. Drehen wir nun diese vier Geraden so lange, bis sie schließlich PB, QA, RA, SC unendlich benachbart werden, so ist offenbar, daß sich die zwölf Schnittpunkte dann auf sechs den Punkten A, B, C, A', B', C' benachbarte Paare verteilen. Es gibt demnach eine Kubik, die die Quartik in diesen sechs Punkten berührt. Auf dieselbe Weise zeigt man, daß es einen Kegelschnitt K gibt, der die Kubik in A', B', C' und demnach in denselben Punkten die Quartik berührt.

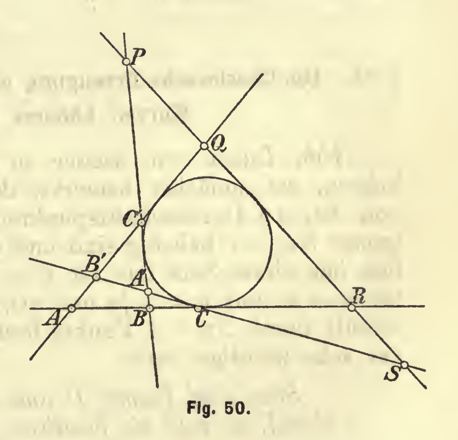


Fig. 50.

Seien nun B'', C'' zwei unendlich benachbarte Punkte von B', C', und zwar so, daß $B''C''$ eine zu $B'C'$ benachbarte Tangente an K ist und mögen sich die beiden übrigen Tangenten von B'' und C'' an K in A'' treffen; dann muß A'' auf der Quartik zu A' benachbart sein. Denn die beiden Dreiecke $A'B'C'$ und $A''B''C''$ sind demselben Kegelschnitt K umgeschrieben und demnach (s. das Beisp. von Nr. 101)

einem anderen Kegelschnitt — und zwar *K* — eingeschrieben. Wir sehen so, daß sich das Fünfseit auf der Kurve verschieben läßt, indem es fortwährend denselben Kegelschnitt K umhüllt und der eingangs aufgestellte Satz ist bewiesen.

Bem. Ist ein $\triangle\, A_1 B_1 C_1$ dem Kegelschnitt K umgeschrieben und liegen zwei seiner Ecken, etwa B_1, C_1 auf der Quartik, so muß auch die dritte A_1 auf der Quartik liegen; denn durch die gegebenen drei Geraden ist ein Fünfseit der Kurve schon festgelegt. Das $\triangle\, A_1 B_1 C_1$ und irgend ein nicht zugehöriges Fünfseit, die zusammen 13 Ecken haben, geben demnach nur 12 unabhängige Bedingungen für eine durchzulegende Quartik. Dieser Satz ist eine Erweiterung des Beispiels von Nr. 101 und läßt sich unschwer auf ein demselben Kegelschnitt umgeschriebenes m- und n-Seit ausdehnen.

§ 54. Die Chaslessche Erzeugung von Kubiken und allgemeinen Kurven höherer Ordnung.

106. Indem wir wieder zu Kurven 3. Ordg. zurückkehren, sei zunächst bemerkt, daß, da bei solchen $p = 1$, von den $3n$ Durchschnittspunkten der Kubik mit einer n-ik immer $3n - 1$ beliebig sind und einer mitbestimmt. [Freilich hat dieser Satz nur für $n \geqq 3$ wirklich einen Inhalt, da für $n = 1$ und $n = 2$ je nur eine Gerade bez. ein Kegelschnitt durch $3n - 1$ Punkte bestimmt wird.] Daraus folgt der sehr wichtige Satz:

Sind zwei Punkte P und P' auf einer Kubik korresidual, so sind sie identisch.

Dies werden wir sofort anwenden, indem wir durch irgend ein Quadrupel G_4 von vier Punkten der Kubik einen Kegelschnitt legen, der die Kubik noch in einer Gruppe G_2 schneidet. Legt man durch G_2 die Gerade, so trifft diese die Kubik in einem Punkte P, und dieser ist derselbe, welchen Kegelschnitt des durch G_4 bestimmten Büschels man auch gewählt haben mag. Denn wir haben die Restgleichungen

$$\left.\begin{matrix} G_4 + G_2 = 0 \\ G_2 + P = 0 \end{matrix}\right\} G_4 = P \quad \text{und} \quad \left.\begin{matrix} G_4 + G_2' = 0 \\ G_2' + P' = 0 \end{matrix}\right\} G_4 = P',$$

woraus $P \equiv P'$ folgt, weshalb P' mit P nach Obigem zusammenfällt. Man heißt P den »gegenüberliegenden Punkt« des Quadrupels G_4. Der Restsatz sagt uns aber noch bedeutend mehr. Nehmen wir P fest und ziehen irgend eine Gerade G durch P, die eine G_2 ausschneidet, so gibt es durch diese G_2 ∞^3 Kegelschnitte, die eine Schar $g_4^{(3)}$ auf der Kubik erzeugen. Da aber die Gerade G selbst noch eine Bewegungsfreiheit hat und die Gruppe G_2 selbst einer Schar $g_2^{(1)}$ angehört, können wir sagen:

Jeder Punkt P einer Kubik liegt einer vierfach unendlichen Schar $g_4^{(4)}$ von Punktquadrupeln gegenüber.

Wollen wir, indem wir wieder von einer bestimmten G_4 ausgehen, die Kegelschnitte des Büschels bestimmen, die die Kurve außerdem noch berühren, so müssen wir nur von dem der Gruppe G_4 gegenüberliegenden Punkt P aus die Tangenten an die Kubik legen und das Problem hat vier Lösungen. Wir sehen nun auch, daß, wenn alle vier Punkte von G_4 in einem Punkte S konsekutiv werden, der zweite Tangentialpunkt von S, den wir in Nr. 102 benützten, nichts anderes ist als der gegenüberliegende Punkt der Gruppe. Und ebenso erkennen wir in Fig. 49 den Punkt *9* als gegenüberliegenden Punkt des speziellen Quadrupels 1^a, 1^b, 1^c, 1^d, wie man ja auch im allgemeinen Falle den gegenüberliegenden Punkt mittels irgend eines der Linienpaare des Quadrupels leicht linear konstruiert.

107. Wir können die vier Punkte eines Quadrupels und den gegenüberliegenden Punkt P benutzen, die Kubik zu konstruieren, indem wir das besprochene Kegelschnittbüschel und das Geradenbüschel durch P projektiv aufeinander beziehen. Hat das Kegelschnittbüschel etwa die Gleichung

$$\mathsf{K} + \lambda \mathsf{K}' = 0$$

und das Geradenbüschel die Gleichung

$$\mathsf{G} + \lambda \mathsf{G}' = 0,$$

so lautet das Erzeugnis dieser beiden projektiven Gebilde in der Tat

$$\mathsf{K}\mathsf{G}' - \mathsf{G}\mathsf{K}' = 0,$$

in welche Form die Gleichung jeder allgemeinen Kubik gebracht werden kann; denn sie enthält viel mehr Konstante

als zur Bestimmung einer solchen nötig sind[79]). Ganz ähnlich wie bei der Erzeugung eines Kegelschnitts durch projektive Strahlbüschel, entspricht hier dem Kegelschnitt, der durch P geht, die Tangente in P an die Kurve und jedem Strahl durch einen der Grundpunkte des Kegelschnittbüschels ein Kegelschnitt, der in dem betreffenden Punkte die Kubik berührt, wie eine einfache Überlegung ergibt.

Indem wir die entsprechende Erzeugung jeder n-ik auf die nächste Nummer verschieben, möchten wir hier noch der Erweiterung gedenken, die SYLVESTER[80]) dem Satz vom gegenüberliegenden Punkte gab, die aber für uns nur eine Anwendung des BRILL-NOETHERschen Restsatzes bildet. Gehen wir nämlich wiederum von einer Gruppe G_4 aus und legen durch diese irgend eine Kurve, die einen Rest Γ gibt, durch Γ eine andere Kurve mit einem Rest Δ usw., bis schließlich — und zwar nach einer geraden Zahl von Operationen — ein einziger Punkt P als Rest erscheint, so ist dies auf jeden Fall der der Gruppe G_4 gegenüberliegende Punkt. Nehmen wir beispielsweise vier Operationen, so haben wir die Restgleichungen

$$G_4 + \Gamma \equiv 0\,, \quad \Gamma + \Delta \equiv 0\,, \quad \Delta + E \equiv 0\,, \quad E + P \equiv 0\,,$$

die sofort $G_4 \equiv P$ ergeben.

Denselben Satz wird man auch leicht aufstellen für jede Gruppe, deren Grad $3k+1$ ist. Denn irgend eine $(k+1)$-ik durch diese Gruppe schneidet noch in zwei weiteren Punkten, die einen Restpunkt P haben, und zu demselben Punkt gelangt man durch jede beliebige Serie von Restbildungen. Beginnt man aber mit einer Gruppe vom Grade $3k+2$, so ist eine ungerade Anzahl von Operationen nötig, um zu einem Restpunkt zu gelangen, während man für eine Gruppe vom Grade $3k$ natürlich nicht einen einzelnen Punkt, sondern korresiduale Scharen von mindestens drei Punkten auf dieselbe Weise erhält.

Beisp. 1. Durch eine G_4 auf einer Kubik lege man einen Kegelschnitt, dieser schneidet in einer G_2; durch diese lege man

[79]) Diese Erzeugung stammt von CHASLES, C. R. Ac. sc. Paris **41**, 1853, S. 677—685.

[80]) Diese SYLVESTERsche Resttheorie erschien fast gleichzeitig (in der 2. Originalausgabe von SALMONS „*Kurventheorie*") mit der ersten viel weiter gehenden Veröffentlichung von BRILL-NOETHER in den Göttinger Nachrichten (1873).

eine Kubik, die eine G_7 ausschneidet; durch die G_7 eine Quartik, die eine Restgruppe G_5 ergibt. Dann wird der Kegelschnitt durch diese fünf Punkte denselben Punkt P als sechsten Schnittpunkt haben, den man gleich mittels der ursprünglichen G_2 als gegenüberliegenden Punkt der G_4 erhalten hätte.

Beisp. 2. Irgend einer Gruppe G_8 auf einer gegebenen Kubik entspricht ein Restpunkt P als neunter Punkt. Diesen können wir linear konstruieren, indem wir durch die G_8 eine in vier Gerade zerfallene Quartik legen, die noch eine G_4 ausschneiden; durch diese G_4 lege man ein Linienpaar und durch die so entstehende G_2 die Gerade, die dann denselben Punkt P ausschneidet, wie jede Kubik durch die gegebenen acht Punkte.

108. Zum Schlusse dieses Abschnitts wollen wir — anknüpfend an die oben besprochene Erzeugung der Kubik — noch zeigen, wie auch jede allgemeine n-ik durch projektive Kurvenbüschel erzeugt werden kann. Analytisch ist die Sache sehr einfach. Es sei $m_1 + m_2 = n$, so erzeugen zwei Kurvenbüschel

$$C_{m_1} + \lambda C'_{m_1} = 0 \quad \text{und} \quad C_{m_2} + \lambda C'_{m_2} = 0$$

die Kurve n^{ter} Ordnung

$$C_{m_1} C'_{m_2} - C'_{m_1} C_{m_2} = 0 .$$

Es ist aber, besonders wegen der Wahl der Fundamentalpunkte der Büschel, etwas schwieriger, an einer gegebenen Kurve [oder auch an gegebenen $\frac{1}{2} n (n+3)$ Punkten] zu zeigen, wie diese Erzeugung eingeleitet werden kann. Wir wollen dies auch nur für $m_1 = 1$, $m_2 = n - 1$ ausführen[81]).

Durch einen Punkt P der gegebenen n-ik legen wir wiederum ein Strahlenbüschel

$$\mathsf{G} + \lambda \mathsf{G}' = 0,$$

das eine $g_{n-1}^{(1)}$ auf der Kurve ausschneidet. Durch eine

---

[81]) Die CHASLESschen Arbeiten über Erzeugung von Kurven besonders dritter Ordnung, worüber man auch die Bände **36**, **37** und **45** der C. R. Ac. sc. Paris sehe, hat DE JONQUIÈRES weiter geführt. Wir verweisen auf dessen *„Essai sur la génération des courbes géométriques etc.“* in Mém. prés. div. sav. Ac. sc. Paris **16** (1858) und sein Buch *„Mélanges de géométrie pure etc.“*, Paris 1856, 8⁰, VIII + 261 S., worinnen auch eine Abhandlung von MACLAURIN über Kurven dritter Ordnung, die für mehrere der oben behandelten Themata grundlegende Bedeutung hat, übersetzt ist.

Gruppe G_{n-1} dieser Schar läßt sich eine $(n-1)$-ik C_{n1-} legen. Diese schneidet die n-ik noch in weiteren

$$n(n-1)-(n-1)=(n-1)^2$$

Punkten. Durch diese $(n-1)^2$ Punkte geht dann ein Büschel

$$C_{n-1}+\lambda C'_{n-1}$$

von $(n-1)$-iken, das dieselbe Schar $g^{(1)}_{n-1}$ auf der n-ik ausschneidet, wie das Geradenbüschel. Die beiden Büschel erzeugen also die Kurve. Die Gleichung der erzeugten Kurve ist

$$C_{n-1}\mathsf{G}'-C'_{n-1}\mathsf{G}=0\,.$$

Ähnlich könnte man von einer Gruppe G_4 ausgehen und durch die übrigen Schnittpunkte eines die Gruppe enthaltenden Kegelschnitts ein Büschel von $(n-2)$-iken legen und so schließlich zu Büscheln $m_1{}^{\text{ter}}$ resp. $m_2{}^{\text{ter}}$ Ordnung aufsteigen.

In entsprechender Weise kann auch jede n-ik mit beliebigen vielfachen Punkten erzeugt werden. Man hat dann lediglich Büschel adjungierter Kurven zu Hilfe zu nehmen oder, wenn der Grad des Büschels zu niedrig ist, dasselbe durch eine feste adjungierte Kurve zu einem adjungierten Büschel zu ergänzen. Wir wollen aber nur noch in einem Beispiel die CHASLESsche Erzeugung auf eine Kubik mit Doppelpunkt übertragen.

Beisp. Die Kubik mit Doppelpunkt kann erzeugt werden durch ein Kegelschnittbüschel und ein ihm projektives Strahlenbüschel, das seinen Scheitel in einem Grundpunkt des Kegelschnittbüschels hat. In der Tat, lautet das Strahlenbüschel etwa

$$x_1+\lambda x_2=0\,,$$

so ist irgend ein Kegelschnitt durch $x_1=0$, $x_2=0$ von der Gleichung $\mathsf{G}_1 x_1+\mathsf{G}_2 x_2=0$, wo G_1 und G_2 Gerade darstellen und ein projektives Büschel der geforderten Art hat die Gleichung

$$\mathsf{G}_1 x_1+\mathsf{G}_2 x_2+\lambda(\mathsf{G}'_1 x_1+\mathsf{G}'_2 x_2)=0\,.$$

Die Elimination von λ ergibt

$$\mathsf{G}'_1 x_1^2+(\mathsf{G}'_2-\mathsf{G}_1)x_1 x_2-\mathsf{G}_2 x_2^2=0\,,$$

welche Form nach Nr. 22, Beisp. 2 (S. 32) den Doppelpunkt direkt anzeigt.

ABSCHNITT XII.

KURVEN DRITTER ORDNUNG.

1. Die Konfiguration der Wendepunkte und harmonischen Polaren.

§ 55. Die wesentliche Konstante einer Kubik. Konfiguration der Wendepunkte. Das syzygetische Büschel.

109. Wenn wir nun darangehen — zum Teil anschließend an das in den vorhergehenden Nummern Behandelte — uns eingehender mit Kurven 3. Ordg. speziell zu beschäftigen, so ist eine der am nächsten liegenden Fragen die, wievielerlei solcher Kurven denn überhaupt möglich seien. Wir wissen, daß alle Kurven 2. Ordg. durch Projektion auseinander hervorgehen, daß es also nur einen Kegel zweiter Ordnung gibt. Wir werden aber sofort einsehen, daß dasselbe für Kurven 3. Ordg. nicht statthaben kann. Denn eine solche enthält neun wesentliche Konstante, während durch eine lineare Transformation nur acht derselben Bedingungen auferlegt werden können (s. Nr. 4). Wir können also durch eine lineare Transformation, indem wir — geometrisch gesprochen — drei neue Gerade als Seiten eines Koordinatendreiecks einführen, von den homogenen zehn Koeffizienten der Gleichung neun in die Gleichungen der neuen Koordinatenseiten verschwinden lassen, dann wird aber immer noch eine Konstante übrig bleiben, die für die betreffende Kurve einen bestimmten Wert hat und dieselbe charakterisiert. Diese Konstante wird dann — da sie ja nur linear auftreten kann — wenn man ihr unendlich viele Werte beilegt, ein ganzes Büschel von Kubiken definieren, deren jede einem anderen Wert der Konstanten entspricht und wir können sagen:

Es gibt ∞^1 projektiv von einander verschiedene Kubiken.

Nach diesem vorläufigen Ergebnis wollen wir eine darauf fußende Einteilung der Kubiken auf später verschieben (s. Nr. 124 ff.) und indem wir uns zur näheren Untersuchung der merkwürdigen Konfiguration der neun Wendepunkte einer beliebigen Kubik wenden, werden wir gleich Gelegenheit haben, eine sog. »kanonische Form« der Kurvengleichung aufzustellen und zu benutzen, in welcher die in Rede stehende Konstante eine wesentliche Rolle spielt.

110. Wir wissen, jede allgemeine Kubik hat neun Wendepunkte; wenn man irgend zwei derselben durch eine Gerade verbindet, so liegt auf dieser Geraden immer noch ein dritter Wendepunkt. Daraus läßt sich sofort der Schluß ziehen, *daß durch jeden Wendepunkt vier Gerade gehen, die die acht übrigen Wendepunkte zu je zweien enthalten.* Nimmt man diese Verteilung für jeden Wendepunkt vor, so tritt offenbar jede Gerade, da sie drei Wendepunkte enthält, dreimal auf und es gibt demnach $\frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 4 = 12$ solcher Linien, die zu je drei die neun Wendepunkte enthalten. Man heißt diese Geraden »Inflexionsachsen«.

Gehen wir von einer dieser Inflexionsachsen a_1 aus, die etwa die Wendepunkte W_1, W_2, W_3 enthalten möge, so gehen durch jeden dieser Wendepunkte noch drei weitere Inflexionsachsen, so daß wir auf diese Weise zehn Achsen erhalten. Demnach sind noch zwei derselben übrig, die durch keinen der Wendepunkte W_1, W_2, W_3 gehen. Denken wir nun etwa den Wendepunkt W_4 mit W_5 durch eine Gerade a_2 verbunden und heißen den dritten Wendepunkt, der auf dieser Linie liegen muß, W_6, so müssen nach Nr. 99 auch die Wendepunkte W_7, W_8, W_9 auf einer Geraden a_3 liegen und wir haben ein Achsendreiseit a_1-a_2-a_3, das alle Wendepunkte enthält. Da durch jeden Wendepunkt, z. B. W_1, vier Achsen gehen, so gruppieren sich die zwölf Inflexionsachsen in vier Dreiseite, von denen jedes durch alle Wendepunkte geht.

Durch die neun Wendepunkte gehen zwei Kurven, nämlich f und H, hindurch; also sind dieselben assoziierte Punkte und *es geht ein ganzes Büschel von Kubiken durch die neun Wendepunkte. Zu diesem Büschel gehören als zerfallene Kurven auch die vier Dreiseite der Inflexionsachsen.*

111. Zu jedem Wendepunkte gehört, wie wir wissen, eine harmonische Polare (s. S. 55), die die drei Berührungs-

punkte der von dem Wendepunkt an die Kurve gehenden Tangenten ausschneidet. Man erhält die harmonische Polare h_1 eines Wendepunktes W_1, indem man durch W_1 zwei beliebige Gerade zieht und auf jeder den vierten harmonischen Punkt bestimmt zu W_1 und den beiden übrigen Schnittpunkten mit der Kurve. Sind diese Schnittpunkte P, Q bez. P', Q', so müssen nach den Eigenschaften des vollständigen Vierseits auch PP', QQ' und PQ', QP' sich auf der harmonischen Polare schneiden. Lassen wir P mit P', Q mit Q' zusammenfallen, so ergibt sich der Satz:

Zieht man durch einen Wendepunkt W_1 eine Gerade W_1PQ und legt in P und Q die Tangenten an die Kubik, so schneiden sich diese auf h_1, der harmonischen Polare von W_1.

Da auch $P \equiv W_2$, $Q \equiv W_3$ sein kann, so erhält man den weiteren Satz:

Die Tangenten in zwei Wendepunkten W_2, W_3 schneiden sich auf der harmonischen Polare h_1 desjenigen Wendepunktes W_1, der mit W_2 und W_3 einer Inflexionsachse angehört[81a]).

Durch das System der Wendepunkte sind demnach die neun harmonischen Polaren vollständig festgelegt. Denn da durch jeden Wendepunkt vier Achsen gehen, sind für jede harmonische Polare schon vier Punkte gegeben. *Die neun Wendepunkte sind also Wendepunkte für jede Kubik des durch sie gehenden Büschels* (nach der in Beisp. 2 von Nr. 31 erwähnten Umkehrung). Dieses besondere Büschel wird ein »syzygetisches Büschel« genannt. Für die in demselben enthaltenen Dreiseite ist die Sache so aufzufassen, daß jeder Punkt dieser zerfallenen Kurven ein Wendepunkt ist.

§ 56. Die Konfiguration der harmonischen Polaren. Dualität.

112. Natürlich ist nun z. B. h_1 auch harmonische Polare von W_1 für das Dreiseit a_1-a_2-a_3 oder, wie man hier sagen

[81a]) Man kann schon hierzu die Fig. 51 vergleichen. Dort sind — aus später zu erörternden Gründen — die Wendepunkte W_1, W_4, W_7 reell. Heißt man die entsprechenden Wendetangenten T_1, T_4, T_7, so schneiden sich z. B. T_1, T_4 in einem Punkte S_{14} auf h_7 usw. Die Tangenten von den Wendepunkten an die Kurve f sind angedeutet.

kann, da W_1 auf a_1 liegt, Polare von W_1 in bezug auf den zerfallenen Kegelschnitt $a_2 a_3$ und geht folglich durch den Doppelpunkt dieses Linienpaares, die der Achse a_1 im Inflexionsdreiseit gegenüberliegende Ecke A_1. Ebenso ist die harmonische Polare h_2 des Wendepunktes W_2 harmonische Polare von W_2 in bezug auf dasselbe Dreiseit und geht somit ebenfalls durch A_1. Gleiches gilt für h_3. Entsprechend werden die drei harmonischen Polaren h_4, h_5, h_6 der Wendepunkte W_4, W_5, W_6 durch die ähnlich definierte Ecke A_2 des Dreiseits a_1-a_2-a_3 gehen nnd h_7, h_8, h_9 laufen durch die Ecke A_3 (vgl. auch hier Fig. 51). Da sich aber dieselbe Betrachtung für jedes der vier Achsendreiseite durchführen läßt, ergibt sich der Satz:

Die neun harmonischen Polaren bilden ein zu den neun Wendepunkten dualistisches System, indem sich dieselben zu je dreien in zwölf Punkten schneiden, die sich in vier Dreiecke gruppieren, so daß jedes Dreieck die sämtlichen neun Polaren enthält. Diese Dreiecke sind identisch mit den Inflexionsdreiseiten und es geht jede harmonische Polare durch je eine der Ecken jedes der vier Dreiecke.

Dem Büschel von Ordnungskubiken mit gemeinschaftlichen Wendepunkten, steht demnach eine Schar von Klassenkubiken mit den neun harmonischen Polaren als gemeinschaftlichen Rückkehrtangenten dual gegenüber. Wir werden im nächsten Kapitel dieses Abschnitts sehen, daß diese Schar nichts anderes ist als die Schar der zu den Büschelkurven gehörigen CAYLEYschen Kurven.

113. Man versteht die ganze Konfiguration noch besser, wenn man bedenkt, daß irgend zwei Inflexionsdreiecke so liegen, daß die Verbindungslinien ihrer Ecken sich noch zu je dreien in sechs Punkten (den Ecken der beiden übrigen Dreiecke) schneiden, daß also — so kann man das offenbar ausdrücken — irgend zwei Inflexionsdreiecke auf sechsfache Art perspektiv sind[82]. Man sieht auch ohne weiteres

[82]) Der Leser zeichnet sich leicht die Fälle, daß zwei Dreiecke ein-, zwei-, drei- und vierfach perspektiv sind. Die sechsfache Perspektivität kann aber nur bei teilweise imaginären Ecken eintreten. Siehe darüber E. HESS: *„Beiträge zur Theorie der mehr-*

ein, daß die zugehörigen sechs Perspektivitätsachsen mit den noch nicht verwendeten Inflexionsachsen (den Seiten der beiden übrigen Dreiecke) übereinstimmen. Dies läßt sich umgekehrt folgendermaßen aussprechen:

Liegen zwei Dreiecke (Dreiseite) sechsfach perspektiv, so

sind die neun Schnittpunkte ihrer Seiten die Wendepunkte eines syzygetischen Büschels von Kurven dritter Ordnung. Dieselben liegen zu dreien auf sechs Geraden, den sechs Perspektivitätsachsen, welche mit den schon gegebenen zwei Dreiseiten die vier Inflexionsdreiseite bilden.

sind die neun Verbindungslinien ihrer Ecken die Rückkehrtangenten einer syzygetischen Schar von Kurven dritter Klasse. Dieselben gehen zu dreien durch sechs Punkte, die sechs Perspektivitätszentren, welche mit den schon gegebenen zwei Dreiecken die vier Inflexionsdreiecke bilden.

Die Inflexionsdreiseite sind mit den Inflexionsdreiecken identisch, indem jeder Ecke eines solchen als Perspektivitätszentrum die Gegenseite als Perspektivitätsachse entspricht.

§ 57. **Die Hessesche Normalform.**

114. Um nun eine kanonische Gleichungsform aufzustellen, an der wir die im Vorstehenden abgeleiteten Eigenschaften nochmals analytisch untersuchen werden, beziehen wir die Kurve zunächst auf ein Koordinatendreieck, dessen Ecken *II*, *III* in den Wendepunkten W_2, W_3 bez. liegen sollen, während die Seiten $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ resp. durch die zugehörigen Wendetangenten dargestellt sein mögen. $x_1 = 0$ ist dann die Linie $\overline{W_1 W_2 W_3} \equiv a_1$. Dann müssen, wenn wir in der Gleichung von f $x_2 = 0$ setzen, alle Glieder verschwinden bis auf x_1^3 und ebenso, wenn $x_3 = 0$ gesetzt wird. Daher sind die Koeffizienten der Glieder $x_1^2 x_3$, $x_1 x_3^2$, x_3^3; $x_1^2 x_2$, $x_1 x_2^2$, x_2^3 sämtlich Null. Die übrigen Glieder lassen sich dann in folgender Weise anordnen:

(1) $$f \equiv x_2 x_3 (a x_1 + b x_2 + c x_3) + d x_1^3 = 0 .$$

fach perspektiven Dreiecke und Tetraeder". Math. Ann. **28**, 1886, S. 167—200. Die oben zum Ausdruck gebrachte Auffassung rührt von GUNDELFINGER her. S. Math. Ann. **7**, 1874, S. 455 und einen Aufsatz über sechsfach perspektive Dreiecke in Arch. Math. Phys. (3) **1**, 1901, S. 252—254.

Aus dieser Gleichungsform ist wiederum sofort ersichtlich, daß auf $x_1 = 0$ noch ein Wendepunkt liegt, dessen Tangente $a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0$ ist.

Statt der Wendetangenten $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ wollen wir nun aber die harmonischen Polaren der betreffenden Wendepunkte als Koordinatenseiten einführen, x_1 aber belassen. D. h. wir setzen

$$(2)\qquad \begin{cases} \vartheta x_1' = x_1 \\ \vartheta x_2' = a x_1 + b x_2 + 2 c x_3 & \left[= \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right] \\ \vartheta x_3' = a x_1 + 2 b x_2 + c x_3 & \left[= \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\right] \end{cases}$$

oder umgekehrt

$$(2^*)\qquad \begin{cases} \sigma \cdot x_1 = x_1' \\ \sigma \cdot 3 b x_2 = -a x_1' - x_2' + 2 x_3' \\ \sigma \cdot 3 c x_3 = -a x_1' + 2 x_2' - x_3' . \end{cases}$$

Durch diese Substitution wird

$$a x_1 + b x_2 + c x_3 = \tfrac{1}{3}(a x_1' + x_2' + x_3')$$

$$9 b c x_2 x_3 = a^2 x_1'^2 - a x_1' x_2' - a x_1' x_3' - 2 x_2'^2 + 5 x_2' x_3' - 2 x_3'^2$$

und schließlich nach einiger Rechnung

$$(3)\qquad \begin{cases} f \equiv A x_1'^3 + B x_1' (x_1'^2 - x_2' x_3' + x_3'^2) \\ \qquad + C(2 x_2'^3 - 3 x_2'^2 x_3' - 3 x_2' x_3'^2 + 2 x_3'^3) . \end{cases}$$

Hier ist aber der Faktor von $B x_1'$ die Hessesche Form des kubischen Faktors von C, wovon man sich durch direktes Ausrechnen überzeugt. Zerfällt man nun den quadratischen Faktor in zwei lineare:

$$(4)\qquad x_2'^2 - x_2' x_3' + x_3'^2 \equiv (x_2' + \varepsilon x_3')(x_2' + \varepsilon^2 x_3') \qquad [\varepsilon^3 = 1]$$

und transformiert x_2', x_3' nochmals, indem man diese beiden linearen Faktoren bez. x_2'' und x_3'' proportional setzt, so weiß man aus der Theorie der binären kubischen Formen[83]), daß dann der kubische Faktor von C auf die kanonische Form $\lambda x_2''^3 + \mu x_3''^3$ gebracht wird, wovon sich der Leser wiederum

[83]) Siehe z. B. Clebsch *„Theorie der binären algebraischen Formen“*, Leipzig 1872, § 38.

durch Ausrechnen überzeugen kann. Auf dieses System der zweigestrichenen Koordinaten bezogen lautet dann die Kurvengleichung

$$f \equiv \alpha x_1''^3 + \beta x_2''^3 + \gamma x_3''^3 + \delta x_1'' x_2'' x_3'' . \tag{5}$$

Nun können wir noch die absoluten Werte der Koordinaten so definieren, daß $\alpha = \beta = \gamma = 1$ wird; dann bleibt nur im letzten Glied ein Koeffizient stehen, den wir mit dem Faktor 6 versehen, und wir erhalten, wenn wir die Striche an den Koordinaten wieder weglassen, die sogenannte HESSEsche[84]) Normalform:

$$f \equiv x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\,m\,x_1 x_2 x_3 = 0 . \tag{6}$$

Hier ist m die der Kurve eigentümliche Konstante. Wir werden nun sofort zeigen, daß die jetzt zugrunde gelegten Koordinatenseiten x_2, x_3 mit den beiden Inflexionsachsen a_2, a_3 identisch sind, so daß also die Kurve auf ein Inflexionsdreiseit bezogen ist. Wir können nämlich f in die Form setzen

$$(6^*)\quad \left\{ \begin{aligned} f \equiv x_1^3 + x_2^3 + (-2\,m\,x_3)^3 - 3\,x_1\,x_2\,(-2\,m\,x_3) \\ + (8\,m^3 + 1)\,x_3^3 = 0\,; \end{aligned} \right.$$

daher läßt sich nach der Zerlegungsformel des Beispiels von Nr. 52, wenn wir noch bedenken, daß dasselbe Verfahren auch auf die Koordinaten x_1 und x_2 angewendet werden kann, die Kurvengleichung in folgenden drei äquivalenten Formen schreiben:

$$(7)\left\{ \begin{aligned} &(-2mx_1 + x_2 + x_3)(-2m\,x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3)(-2mx_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + (8\,m^3 + 1)\,x_1^3 = 0 \\ &(x_1 - 2\,m\,x_2 + x_3)(\varepsilon\,x_1 - 2\,m\,x_2 + \varepsilon^2 x_3)(\varepsilon^2 x_1 - 2\,m\,x_2 + \varepsilon\,x_3) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + (8\,m^3 + 1)\,x_2^3 = 0 \\ &(x_1 + x_2 - 2\,m\,x_3)(\varepsilon\,x_1 + \varepsilon^2 x_2 - 2\,m\,x_3)(\varepsilon^2 x_1 + \varepsilon\,x_2 - 2\,m\,x_3) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + (8\,m^3 + 1)\,x_3^3 = 0 . \end{aligned} \right.$$

Hiermit ist nicht bloß der Beweis geliefert, daß in der Tat x_1, x_2, x_3 mit a_1, a_2, a_3 identisch sind, sondern es sind in den runden Klammern zugleich die Gleichungen der neun Wendetangenten gegeben, so daß wir sofort imstande sind, die

[84]) Die bedeutenden Arbeiten HESSEs über Kurven dritter Ordnung findet der Leser in dessen von der K. Bayr. Ak. d. W. herausgegebenen „*Gesammelten Werken*“, München 1897, S. 89—216.

Koordinaten der neun Wendepunkte anzugeben. Es ist für

$$(8)\begin{cases} W_1:\ x_1=0,\quad x_2+x_3=0; \\ W_2:\ x_1=0,\ x_2+\varepsilon x_3=0;\quad W_3:\ x_1=0,\ x_2+\varepsilon^2 x_3=0; \\ W_4:\ x_2=0,\quad x_3+x_1=0; \\ W_5:\ x_2=0,\ x_3+\varepsilon x_1=0;\quad W_6:\ x_2=0,\ x_3+\varepsilon^2 x_1=0; \\ W_7:\ x_3=0,\quad x_1+x_2=0; \\ W_8:\ x_3=0,\ x_1+\varepsilon x_2=0;\quad W_9:\ x_3=0,\ x_1+\varepsilon^2 x_2=0. \end{cases}$$

§ 58. Das System der Wendepunkte und Inflexionsdreiseite.

115. Hier können wir gleich eine Bemerkung über die Realitätsverhältnisse einschieben. Daß nicht alle neun Wendepunkte reell sein können, ist wegen ihrer Konfiguration selbstverständlich. Es sind deshalb, da imaginäre Wendepunkte nur in Paaren auftreten können, mindestens ein reeller (W_1) und mindestens zwei konjugiert imaginäre Wendepunkte (W_2, W_3) vorhanden. Dann sind die Koordinatenseiten x_2, x_3 von Gleichung (1) als konjugiert imaginär zu betrachten, was sich auf x_2', x_3' überträgt. Setzt man nun etwa

$$x_2' \equiv x + i\,\xi,\quad x_3' \equiv x - i\,\xi,$$

so findet man aus (4)

$$x_2'' x_3'' \equiv x^2 - 3\,\xi^2\,.$$

x_2'' und x_3'' sind also reelle Koordinatenseiten und wir gebrauchen in (6), (7) und (8) reelle Koordinaten. Aus dem Schema (8) ist also jetzt ersichtlich, daß von allen neun Wendepunkten überhaupt nur drei und immer drei (in unserer Bezeichnung W_1, W_4, W_7) reell sind. Daß dies drei Wendepunkte sein müssen, die einer Inflexionsachse angehören, ist an sich klar. Man ersieht dies aber auch daraus, daß die Determinante ihrer Koordinaten verschwindet. So könnte man durch Probieren auch alle übrigen Tripel von Wendepunkten bestimmen, die einer der Inflexionsachsen angehören. Wir finden aber die Gleichungen aller noch fehlenden neun Achsen wieder auf einen Schlag, wenn wir die Gleichung (6) auf eine andere Art zerlegen. Man kann nämlich statt (6) die Gleichung benutzen

$$(6^\dagger)\quad f \equiv x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3\,x_1\,x_2\,x_3 + 3\,(2\,m+1)\,x_1\,x_2\,x_3 = 0$$

und daraus folgende drei Formen herleiten:

$$
(9)\quad \begin{cases}
(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3)(x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3) \\
\qquad + 3(2m + 1)\, x_1 x_2 x_3 = 0 \\
(\varepsilon x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + \varepsilon x_3)(\varepsilon^2 x_1 + x_2 + \varepsilon^2 x_3) \\
\qquad + 3(2m + \varepsilon)\, x_1 x_2 x_3 = 0 \\
(\varepsilon^2 x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \varepsilon^2 x_2 + x_3)(\varepsilon x_1 + \varepsilon x_2 + x_3) \\
\qquad + 3(2m + \varepsilon^2)\, x_1 x_2 x_3 = 0\,.
\end{cases}
$$

Schreiben wir diese kürzer folgendermaßen:

$$
(9^*)\quad \begin{cases}
b_1 b_2 b_3 + \lambda\, a_1 a_2 a_3 = 0 \\
c_1 c_2 c_3 + \mu\, a_1 a_2 a_3 = 0 \\
d_1 d_2 d_3 + \nu\, a_1 a_2 a_3 = 0\,,
\end{cases}
$$

so erkennen wir a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3; d_1, d_2, d_3 als die vier Inflexionsdreiseite und aus (9) sind die Gleichungen sämtlicher Achsen zu entnehmen. Wir stellen hiernach mit Hilfe des Systems (8) leicht fest, welche drei Wendepunkte auf irgend einer der Achsen liegen. So findet man für c_2 z. B. W_2, W_6, W_7, während die reellen Wendepunkte W_1, W_4, W_7 auf b_1 liegen usw. All diese scheinbar komplizierten Verhältnisse lassen sich leicht übersehen, wenn man die neun Wendepunkte in Form einer Determinante anschreibt. Dann liegen nämlich 1) alle in einer Horizontalreihe, 2) alle in einer Vertikalreihe stehenden, 3) die drei den positiven Determinantengliedern entsprechenden, 4) die den negativen Determinantengliedern entsprechenden Tripel von Wendepunkten auf Inflexionsachsen und zwar der Reihe nach auf den Dreiseiten der a_i, b_i, c_i, d_i. Ein kurzes Studium des folgenden Schemas wird das alles klarstellen:

$$
(10)\quad \begin{array}{ccccccc}
 & c_1 & & c_2 & & c_3 & \\
 & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & \\
d_1 \diagup & W_1 & & W_2 & & W_3 & - a_1 \\
d_2 \diagup & W_4 & & W_5 & & W_6 & - a_2 \\
d_3 \diagup & W_7 & & W_8 & & W_9 & - a_3 \\
 & | & & | & & | & \\
 & b_1 & & b_2 & & b_3 &
\end{array}
$$

Hierbei zeigt die Richtung der Striche bei den c_i und d_i die Richtung der in Betracht kommenden Diagonalen der zu dem Glied gehörigen Unterdeterminante an. Wir können mit Hilfe dieses Schemas nun auch umgekehrt für jeden Wendepunkt die vier Achsen angeben, die durch ihn gehen. Für W_5 z. B. findet man a_2, b_2, c_1, d_3 usw.

§ 59. Das System der harmonischen Polaren und Inflexionsdreiecke.

116. Was die Realität der Achsen betrifft, so sehen wir, daß ein ganzes Dreiseit a_1-a_2-a_3, sowie eine weitere Seite b_1 reell sind. In dem Dreiseit b_1-b_2-b_3 ist aber auch die Ecke B_1 reell, da b_2, b_3 konjugiert imaginär sind[84a]). Von den übrigen Achsen sind konjugiert imaginär c_1, d_1, die sich im reellen Wendepunkt W_1 schneiden; c_2, d_3, die den Wendepunkt W_7 und c_3, d_2, die W_4 ergeben.

Die Gleichung der harmonischen Polare h_1 eines Wendepunktes, z. B. W_1, stellt man am leichtesten auf, wenn man bedenkt, daß diese durch die Ecke $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ gehen muß, während sie die Seite $x_1 = 0$ in dem zu den drei Wendepunkten W_1, W_2, W_3 harmonisch gelegenen Punkte schneidet. Ihre Gleichung ist daher einfach $x_2 - x_3 = 0$, ebenso erhält man für W_2 die harmonische Polare $h_2 \equiv x_2 - \varepsilon x_3 = 0$ usw. Die hier obwaltende Reziprozität sehen wir aber weit besser, wenn wir die (Linien-)Koordinaten dieser harmonischen Polaren angeben. Wir erhalten unschwer das Schema

$$(11)\begin{cases} \qquad\qquad h_1:\ u_1 = 0,\ \ u_2 + u_3 = 0; \\ h_2:\ u_1 = 0,\ u_2 + \varepsilon^2 u_3 = 0;\quad h_3:\ u_1 = 0,\ u_2 + \varepsilon u_3 = 0; \\ \qquad\qquad h_4:\ u_2 = 0,\ \ u_3 + u_1 = 0; \\ h_5:\ u_2 = 0,\ u_3 + \varepsilon^2 u_1 = 0;\quad h_6:\ u_2 = 0,\ u_3 + \varepsilon u_1 = 0; \\ \qquad\qquad h_7:\ u_3 = 0,\ \ u_1 + u_2 = 0; \\ h_8:\ u_3 = 0,\ u_1 + \varepsilon^2 u_2 = 0;\quad h_9:\ u_3 = 0,\ u_1 + \varepsilon u_2 = 0, \end{cases}$$

woraus ersichtlich ist, daß die harmonischen Polaren ebenso zu den Ecken des Fundamentaldreiecks liegen, wie die Wende-

[84a]) Die Ecke B_1 befindet sich in Fig. 51 im Schnittpunkt von h_1, h_4, h_7. Der Buchstabe aber wurde Platzmangels wegen weggelassen.

punkte zu den Seiten desselben. Es erscheint nur ε mit ε^2 vertauscht.

Selbstverständlich sind die drei den reellen Wendepunkten entsprechenden harmonischen Polaren h_1, h_4, h_7 ebenfalls reell. Die reelle Ecke, durch die sie laufen, hat die Gleichung $u_1 + u_2 + u_3 = 0$. Diese Ecke B_1 ist also der Einheitspunkt des angenommenen Koordinatensystems, ebenso wie die reelle Achse b_1 die Einheitsgerade darstellt. Um die Koordinaten (und damit die Gleichung) irgend einer anderen Ecke z. B. B_2 zu finden, kann man das System der Gleichungen $b_1 = 0$, $b_3 = 0$ auflösen. Doch wird man praktisch besser versuchen, die Werte 1, ε, ε^2 für die drei Koordinaten so zu verteilen, daß in jedem Klammerausdruck die Summe $1 + \varepsilon + \varepsilon^2$ auftritt. So findet man für die Koordinaten von B_2: 1, ε^2, ε und für die von B_3: 1, ε, ε^2. Man wird dann bald bemerken, daß man auch hier nur die x_i durch u_i und ε^2 mit ε zu vertauschen braucht. Das ganze Schema der Gleichungen aller vier Tripel von Ecken der Inflexionsdreiecke ist dann folgendes:

$$
(12)\quad \left\{
\begin{array}{l}
A_1:\ u_1 = 0; \qquad A_2:\ u_2 = 0; \\
\qquad A_3:\ u_3 = 0; \\
B_1:\ u_1 + u_2 + u_3 = 0; \quad B_2:\ u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon u_3 = 0; \\
\qquad B_3:\ u_1 + \varepsilon u_2 + \varepsilon^2 u_3 = 0; \\
C_1:\ \varepsilon^2 u_1 + u_2 + u_3 = 0; \quad C_2:\ u_1 + u_2 + \varepsilon^2 u_3 = 0; \\
\qquad C_3:\ u_1 + \varepsilon^2 u_2 + u_3 = 0; \\
D_1:\ \varepsilon u_1 + u_2 + u_3 = 0; \quad D_2:\ u_1 + \varepsilon u_2 + u_3 = 0; \\
\qquad D_3:\ u_1 + u_2 + \varepsilon u_3 = 0.
\end{array}
\right.
$$

Wir erhalten so das zu (10) dualistische Schema

$$
(13)\quad
\begin{array}{ccccc}
 & C_1 & C_2 & C_3 & \\
 & \diagdown & \diagdown & \diagdown & \\
D_1 \diagup & h_1 & h_2 & h_3 & — A_1 \\
D_2 \diagup & h_4 & h_5 & h_6 & — A_2 \\
D_3 \diagup & h_7 & h_8 & h_9 & — A_3 \\
 & | & | & | & \\
 & B_1 & B_2 & B_3 &
\end{array}
$$

Die Schemata (10) und (13) stellen die Lage der ganzen Konfiguration vollständig dar. Wir überlassen es dem Leser, auch die von uns angedeutete sechsfache Perspektivität ins einzelne zu verfolgen.

Beisp. 1. Wir wollen noch sehen, ob etwa in der Gleichung (6) für einen bestimmten Wert von m eine Kubik mit Doppelpunkten enthalten ist, für die unsere obigen Aufstellungen ja nicht mehr Geltung haben würden. Dieser Doppelpunkt (ξ_1, ξ_2, ξ_3) müßte die Gleichungen erfüllen:

$$\text{(I)}\ \xi_1^2 + 2m\xi_2\xi_3 = 0; \quad \text{(II)}\ \xi_2^2 + 2m\xi_3\xi_1 = 0; \quad \text{(III)}\ \xi_3^2 + 2m\xi_1\xi_2 = 0.$$

Durch Multiplikation von (I) und (II) findet man $\xi_1\xi_2 = 4m^2\xi_3^2$ und wenn man dies mit (III) vergleicht, so ergibt sich

$$8m^3 + 1 = 0.$$

Für die drei Werte von m, die diese Gleichung befriedigen, stellt aber das System (9) je ein Inflexionsdreiseit dar, wozu wir noch das Fundamentaldreiseit nehmen müssen, das dem Wert $m = \infty$ entspricht, den wir wegen nicht homogener Einführung des Parameters nicht erhalten konnten. Das Büschel (6) enthält also außer den vier in Dreiseite zerfallenen Kurven keine Kubiken mit Doppelpunkten. Dies ist in der Tat unmöglich, da eine solche nicht sämtliche Grundpunkte zu Wendepunkten haben könnte. [Siehe das nächste Beispiel.]

Beisp. 2. Da es ∞^2 Punkte (y_1, y_2, y_3) in der Ebene gibt, so bilden alle konischen Polaren einer Kubik ein zweifach unendliches System. Dies ist ein Netz, wie wir im nächsten Kapitel zeigen werden. Legen wir Gleichung (5) — ohne die Striche an den Koordinaten — zugrunde, so ist die Gleichung dieses Netzes

$$y_1(3\alpha x_1^2 + \delta x_2 x_3) + y_2(3\beta x_2^2 + \delta x_1 x_3) + y_3(3\gamma x_3^2 + \delta x_1 x_2) = 0.$$

Wenn nun f einen Doppelpunkt hat, so gehen alle konischen Polaren durch denselben. Die drei durch die runden Klammern dargestellten Kegelschnitte müßten einen Punkt gemeinsam haben. Eliminieren wir aus den drei Gleichungen die Variablen wie im vorigen Beispiel, so erhält man

$$\delta^3 + 27\alpha\beta\gamma = 0,$$

was wiederum die Dreiseite ergäbe. Wir bemerken aber, auch ohne daß wir die Resultante (zwölften Grades in α, β, γ, δ) wirklich bilden, daß diese die Faktoren α, β, γ enthalten muß. Denn für $\alpha = 0$ z. B. gehen alle drei Kegelschnitte durch $x_2 = 0$,

$x_3 = 0$ und die kanonische Form für eine Kubik mit Doppelpunkten in der Ecke I lautet:

$$x_2^3 + x_3^3 + 6\,m\,x_1\,x_2\,x_3 = 0\,.$$

Der Leser wird nun leicht alle Resultate dieses Abschnitts auf diese einfachere Form übertragen und so den Anschluß an Abschnitt V, 2 herstellen. Die dort benutzte kanonische Form

$$(x_2^2 - \omega\,x_1^2)\,x_3 - x_1^3 = 0$$

entsteht offenbar, wenn man eine Wendetangente für $x_3 = 0$, die Verbindungslinie des Wendepunktes mit dem Doppelpunkte als $x_1 = 0$ und die zu dieser und den beiden Doppelpunktstangenten harmonische Gerade für $x_2 = 0$ nimmt.

Aus beiden Formen geht die schon öfter gebrauchte Normalform für eine Kubik mit Spitze hervor:

$$x_3^3 + \theta\,x_1\,x_2^2 = 0\,.$$

2. Die Kurven H, C und die Fundamentalkurve dritter Klasse Π.

§ 60. Die Hessesche Kurve als Jacobische Kurve des Netzes der Polarkegelschnitte. Gleichung in der Normalform.

117. Wir haben soeben darauf hingewiesen, daß das ganze System der Polarkegelschnitte irgend einer Kubik ein Netz bildet mit der Gleichung

$$(1) \qquad y_1 f_1^x + y_2 f_2^x + y_3 f_3^x = 0\,,$$

wo man die y_i als Parameter auffassen kann. Wohl stellt Gleichung (1), auch wenn f von höherer als der dritten Ordnung ist, das zweifach-unendliche System der ersten Polaren dar, doch ist dies in der Tat nur für $n = 3$ ein Netz; denn in diesem Falle wird das Polarsystem bestimmt durch die neun Konstanten von f und durch $3 \cdot 2 = 6$ Koordinaten der drei (ganz beliebigen) Koordinatenecken, also zusammen 15 Konstanten, während ein Kegelschnittnetz von drei Kegelschnitten, also ebenfalls von $3 \cdot 5 = 15$ Konstanten abhängt. Für jedes höhere n ist das in Rede stehende System der ersten Polaren, wie man sich leicht überlegt, ein beschränkteres als das allgemeine Netz von $(n-1)$-iken.

Es ist einleuchtend, daß infolge des erwähnten Zusammenhanges jedem Satze über ein Kegelschnittnetz ein

solcher über eine allgemeine Kubik entspricht. Ja man kann die Theorie der Kubik ganz auf die des Kegelschnittnetzes (und des dualistischen Gewebes) aufbauen. Es dürfte bekannt sein, daß, solange es sich nur um ein Büschel handelt, jedem Punkte P ein in bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels »konjugierter Punkt« P' entspricht, durch den die Polaren von P in bezug auf die sämtlichen Büschelkegelschnitte hindurch gehen. Für ein Netz ist das nun im allgemeinen nicht mehr der Fall. Es wird jedoch eine Kurve von Punkten P geben, deren Polaren in bezug auf drei und infolgedessen in bezug auf alle Kegelschnitte des Netzes durch ein und denselben Punkt P' gehen. Diese Kurve heißt die »JAKOBIsche Kurve« des Netzes[85]). Auf ihr liegen, wegen der Vertauschbarkeit von P und P' auch alle Punkte P'.

Nehmen wir aus unserem Netze die drei Kegelschnitte $f_i^x = 0$ heraus, so lauten, wenn die y_i laufende Koordinaten sind, die Gleichungen der drei Polaren eines Punktes $P(x_1, x_2, x_3)$ in bezug auf diese drei Kegelschnitte

$$(2) \qquad \begin{cases} y_1 f_{11} + y_2 f_{12} + y_3 f_{13} = 0\,, \\ y_1 f_{21} + y_2 f_{22} + y_3 f_{23} = 0\,, \\ y_1 f_{31} + y_2 f_{32} + y_3 f_{33} = 0\,, \end{cases}$$

und die Elimination der y_i gibt die JAKOBIsche Kurve, die, wie wir sehen, mit der HESSEschen Determinante

$$\mathsf{H} \equiv \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = 0$$

übereinstimmt. Daß dann der konjugierte Pol $P'(y_1, y_2, y_3)$, der P eindeutig zugeordnet ist, auch auf H liegt, wurde schon früher gezeigt. Der Leser wird auch leicht nachweisen, daß die Punkte P, P' konjugiert sind in bezug auf alle Kegelschnitte des Netzes.

118. Für unsere kanonische Form

$$(3) \qquad f \equiv x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\,m\,x_1 x_2 x_3 = 0$$

---

[85]) Näheres über Kurvensysteme siehe im Abschnitt XIV.

erhalten wir leicht, wenn wir von Zahlenfaktoren absehen

$$\mathsf{H} \equiv \begin{vmatrix} x_1 & m\,x_3 & m\,x_2 \\ m\,x_3 & x_2 & m\,x_1 \\ m\,x_2 & m\,x_1 & x_3 \end{vmatrix}$$

oder ausgerechnet

$$(4) \qquad \mathsf{H} \equiv m^2 (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - (1 + 2\,m^3)\,x_1\,x_2\,x_3 = 0\,.$$

Diese Form sagt uns wieder, daß H selbst dem Büschel (3) angehört, wo ja m als veränderlicher Parameter gedacht werden kann und daß somit die neun Punkte, welche allen Kurven gemeinsam sind, die Wendepunkte sein müssen.

Wir sehen aber, daß m in H zur dritten Potenz vorkommt. Das bedeutet:

Wenn wir irgend eine Kurve dritter Ordnung $\mathsf{H} = 0$ *als gegeben betrachten, so gibt es drei Kurven* $f = 0$, *für welche* H *die Hessesche Kurve ist.*

Denn sei

$$(4^*) \qquad \mathsf{H} \equiv x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\,\mu\,x_1\,x_2\,x_3 = 0\,,$$

so bestimmt sich das zugehörige m der Gleichung (3) aus der kubischen Gleichung

$$(5) \qquad 6\,\mu = -\frac{1 + 2\,m^3}{m^2}\,.$$

Die Wichtigkeit dieser Bemerkung wird gleich einleuchten.

§ 61. Korrespondierende Punktepaare auf H. Vertauschung der Hesseschen und der Grundkurve.

119. Die in Nr. 117 betrachteten konjugierten Punkte P, P' sind auch »korrespondierende Punkte« auf H in dem früher (§ 14 u. Abschnitt XI) erläuterten Sinne. Um über das System dieser korrespondierenden Punkte eine Übersicht zu erlangen, beweisen wir zuvörderst den Satz, daß die Tangenten an H in den korrespondierenden Punkten P und P' einen gemeinschaftlichen Tangentialpunkt haben. Dem Punkte P entspricht nämlich als erste Polare in bezug auf f ein Linienpaar durch P', und P' ein Linienpaar durch P. Seien die vier Schnittpunkte dieser beiden Linienpaare Q, R, S, T, so daß die Linienpaare lauten

$$\overline{PTR},\ \overline{PQS};\quad \overline{P'TQ},\ \overline{P'RS},$$

so hat jeder Kegelschnitt des Büschels durch Q, R, S, T seinen Pol auf der Geraden PP'. Unter diesen Kegelschnitten ist aber noch ein drittes Linienpaar QR, ST, dessen Doppelpunkt L auf H liegen muß. Der zu L korrespondierende Punkt L', d. i. der Pol zu dem in Rede stehenden Linienpaar muß auf PP' und auf H liegen, ist also der dritte Schnittpunkt von PP' mit H. Wenn wir nun etwa in P die Tangente an H legen, so ist dies die gerade Polare von P' in bezug auf f nach einem früheren allgemeinen Satz über die STEINERsche Kurve S, die hier mit H identisch ist. Diese Gerade ist aber dann zugleich Polare für das durch P gehende Linienpaar, die konische Polare von P', und geht infolge der harmonischen Eigenschaften des Vierseits durch L. Aus dem nämlichen Grunde geht die Tangente in P' an f durch denselben Punkt L und wir können sagen:

> *Die Tangenten von* H *in zwei korrespondierenden Punkten* P, P' *haben als gemeinschaftlichen Tangentialpunkt denjenigen Punkt* L, *welcher der korrespondierende Punkt ist zu dem dritten Durchschnittspunkt* L' *der Geraden* PP' *mit* H.

Wir müssen noch ein Wort sagen über die konische Polare von L. Diese muß, da die geraden Polaren von P und P' durch L gehen, ihrerseits P und P' enthalten. Da sie überdies ein Linienpaar sein muß, so ist PP' ihr einer Bestandteil; der andere ist dann eine Gerade durch L', auf deren Eigenschaften wir nicht näher eingehen wollen. Aus dem Mitgeteilten folgt aber schon die wichtige Tatsache, daß die CAYLEYsche Kurve C, die allgemein als Einhüllende der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte auf H und S definiert ist, die also bei Kubiken durch die Verbindungslinien korrespondierender Punkte P, P' erzeugt wird, hier mit der Enveloppe der Linienpaare identisch ist, in welche konische Polaren zerfallen können. Denn da jede Gerade PP' Bestandteil eines solchen Linienpaares ist, werden wir, da doch keiner der beiden Bestandteile ausgezeichnet ist, auch ohne direkten Nachweis die Umkehrung annehmen dürfen, daß jede Gerade eines zerfallenen Polarkegelschnittes zwei korrespondierende Punkte von H verbindet.

120. Wenn wir nun aber umgekehrt irgend eine Kurve 3. Ordg. $\mathsf{H} = 0$ geben, so finden wir auf derselben zu einem Punkte P infolge der in der vorigen Nummer bewiesenen Eigenschaft den korrespondierenden P', indem wir in P die Tangente legen und von deren Tangentialpunkt L aus an H wiederum die Tangente ziehen. Da die letztere Aufgabe aber drei Lösungen hat, so gibt es zu jedem Punkte P drei korrespondierende Punkte P', P'', P''', die den drei Kurven f entsprechen, für welche H als HESSEsche Kurve betrachtet werden kann. Die korrespondierenden Punktepaare jeder allgemeinen Kubik ordnen sich daher, wie wir gleich genauer sehen werden, in drei verschiedene Systeme.

Gehen wir nämlich von einem bestimmten Paar korrespondierender Punkte P, P' mit dem Tangentialpunkt L aus und verbinden diese beiden Punkte mit irgend einem Punkte E der Kurve, so daß EP bez. EP' zwei weitere Schnittpunkte F, F' mit der Kubik ergeben, so läßt sich unschwer zeigen, daß dies wieder ein korrespondierendes Punktepaar (d. h. also ein Paar mit gemeinschaftlichem Tangentialpunkt) ist und daß weiter die Verbindungslinien PF' und $P'F$ sich in einem neuen Punkte E' der Kubik treffen, der zu E korrespondierend ist. Denn wir haben, wenn wir mit P_0, P_0' die den Punkten P, P' auf der Kubik benachbarten Punkte bezeichnen, in $P_0PFP_0'P'F'$ ein der Kurve einbeschriebenes Sechseck, von dem sich zwei Paare gegenüberliegender Seiten P_0P und $P_0'P'$ (in L), sowie PF und $P'F'$ (in E) auf der Kurve schneiden; infolgedessen liegt auch der Schnittpunkt der beiden anderen Gegenseiten, nämlich FP_0' und $F'P_0$, die ja mit FP' und $F'P$ identisch sind, d. i. der Punkt E', auf der Kubik. Wir knüpfen damit an die Untersuchungen des Abschnittes XI an und sehen aus Nr. 104, da nun ein der Kubik einbeschriebenes vollständiges Vierseit vorliegt, daß auch F, F' und E, E' einen gemeinsamen Tangentialpunkt haben, d. h. korrespondierende Punkte sein müssen.

Es ist klar, daß, wenn wir von P, P'' oder P, P''' und demselben Punkte E ausgegangen wären, auch zwei von E' verschiedene Punkte E'' und E''' als korrespondierend zu E sich ergeben hätten und zwei andere Punkte F'', F''' als korrespondierend zu F, so daß wir sagen können:

Auf jeder Kubik gibt es drei wesentlich verschiedene Systeme von korrespondierenden Punkten, derart, daß immer zwei Paare desselben Systems kreuzweise verbunden zu einem neuen Paare des gleichen Systems auf der Kurve führen.

Aus diesem Satze geht ohne weiteres die SCHRÖTERsche Erzeugung[86]) der Kubik aus drei Polepaaren desselben Systems hervor. Man verbindet irgend zwei der gegebenen Paare kreuzweise und erhält auf diese Weise immer neue Punktepaare der Kurve.

Zugleich ist nach dem Früheren offenbar, daß es auch drei verschiedene Systeme von dreimal berührenden Kegelschnitten geben muß. Es würde uns jedoch zu weit führen, wollten wir auf die Beziehungen dieser »Tripel« von Berührungspunkten zu dem Netz der konischen Polaren und die hieraus folgende Auffassung der Kubik als »Tripelkurve« des Netzes näher eingehen[87]).

§ 62. Gleichung der Cayleyschen Kurve in der Normalform.

121. Um für unsere kanonische Form auch die Gleichung der CAYLEYschen Kurve C aufzustellen, benutzen wir die Bemerkung der Nr. 119, daß dieselbe von allen zerfallenen konischen Polaren eingehüllt wird. Setzen wir die linke Seite der Gleichung der konischen Polare (wo die x_i laufende Koordinaten sein mögen)

$$(6) \qquad x_1^2 f_{11}^y + 2\, x_1\, x_2\, f_{12}^y + x_2^2 f_{22}^y + \cdots = 0$$

identisch mit dem Produkte

$$(6^*) \qquad (u_1\, x_1 + u_2\, x_2 + u_3\, x_3)\,(v_1\, x_1 + v_2\, x_2 + v_3\, x_3)$$

zweier einhüllenden Geraden, so ergeben sich aus der Vergleichung entsprechender Glieder die Gleichungen

---

[86]) Math. Ann. **5**, 1872, S. 50. — Nach einem Ausspruche von CLEBSCH leistet diese SCHRÖTERsche Konstruktion an Einfachheit das Äußerste, was man verlangen kann. Wie später A. HURWITZ gezeigt hat, liefert sie aber leider nicht alle Kurvenpunkte. S. J. r. ang. Math. **107**, 1890, S. 141—147.

[87]) Zu diesem Kapitel vergleiche man besonders SCHRÖTERS Buch über Kurven dritter Ordnung (L. V.).

$$(7)\quad \begin{cases} f_{11} = u_1 v_1 & 2 f_{12} = u_1 v_2 + u_2 v_1 \\ f_{22} = u_2 v_2 & 2 f_{23} = u_2 v_3 + u_3 v_2 \\ f_{33} = u_3 v_3 & 2 f_{31} = u_3 v_1 + u_1 v_3 \end{cases}$$

und aus diesen sechs Gleichungen lassen sich die linear vorkommenden Größen y_i und v_i eliminieren, was zur Gleichung von C in den u_i führt. Wir wollen dies nur für unsere kanonische Form durchführen. Für diese wird das System (7) zu

$$(8)\quad \begin{cases} y_1 = u_1 v_1 & 2 m y_3 = u_2 v_3 + u_3 v_2 \\ y_2 = u_2 v_2 & 2 m y_2 = u_3 v_1 + u_1 v_3 \\ y_3 = u_3 v_3 & 2 m y_1 = u_1 v_2 + u_2 v_1 . \end{cases}$$

Hieraus ergeben sich durch Elimination der y_i zunächst die drei Gleichungen

$$(9)\quad \begin{cases} 2 m u_1 v_1 - u_3 v_2 - u_2 v_3 = 0 \\ - u_3 v_1 + 2 m u_2 v_2 - u_1 v_3 = 0 \\ - u_2 v_1 - u_1 v_2 + 2 m u_3 v_3 = 0 , \end{cases}$$

woraus durch Elimination der v_i die Determinante

$$\begin{vmatrix} 2 m u_1 & - u_3 & - u_2 \\ - u_3 & 2 m u_2 & - u_1 \\ - u_2 & - u_1 & 2 m u_3 \end{vmatrix} = 0$$

oder ausgerechnet die Gleichung von C in der kanonischen Form entsteht

$$(10)\quad C \equiv m (u_1^3 + u_2^3 + u_3^3) + (1 - 4 m^3) u_1 u_2 u_3 = 0 .$$

In dieser Gleichung sehen wir den direkten Beweis, daß C zu den Ecken des Fundamentaldreiecks sich genau so verhält, wie H zu den Seiten. Die neun Rückkehrtangenten der CAYLEYschen Kurve sind daher, da sie den neun Wendepunkten dualistisch entsprechen, die neun harmonischen Polaren der Grundkurve, und wenn wir m für einen Augenblick variabel denken, so stellt Gleichung (10) die dem Büschel der Grundkurven zugeordnete Schar von CAYLEYschen Kurven dar.

Wir sehen auch, daß die Klasse von C, die nach den allgemeinen Untersuchungen von Nr. 35 gleich 6 sein müßte,

im Falle der Kurven 3. Ordg., wegen des Zusammenfallens von H und S, nur 3 ist.

§ 63. Die Fundamentalkurve dritter Klasse Π.

122. Zu jeder dieser Kurven dritter Klasse der Schar (10) als Grundkurve gehört dasselbe System der neun Wendepunkte und neun harmonischen Polaren. Wenn wir nun aber von H und C ausgehen, so muß es offenbar ebenso, wie es eine Grundkurve f des Büschels gab, aus welcher diese Kurven hervorgingen, wegen der vollständigen Dualität auch eine Grundkurve Π (nach der Bezeichnung bei Clebsch-Lindemann) der Schar geben, für welche C (im dualistischen Sinne) die Hessesche Kurve und H (wieder im dualistischen Sinne) die Cayleysche Kurve ist. Wir müssen dazu nur den ganzen vorigen Abschnitt ins Dualistische umwerten. Jeder Geraden der Ebene entspricht ein Polarkegelschnitt C^2 in bezug auf Π. All diese Kurven zweiter Klasse bilden ein Gewebe. C ist dann die Einhüllende derjenigen Geraden, deren Polarkegelschnitt in ein Punktepaar zerfällt. Gleichzeitig gehören dann auch die Verbindungslinien dieser Punktepaare der Kurve Π an, während die Punktepaare selbst H erfüllen und mit den Polepaaren auf H, die wir oben definierten, identisch sind.

Für die neun Rückkehrtangenten von Π fällt der eine Punkt des zugehörigen Paares mit einer Spitze von Π zusammen, während der andere ein harmonischer Pol, d. h. der entsprechende Wendepunkt ist. Der korrespondierende Punkt eines Wendepunktes ist nun aber der Doppelpunkt des zugehörigen Linienpaares, d. i. der Schnittpunkt der Wendetangente mit der harmonischen Polaren (vgl. für das Folgende immer die Fig. 51, die an einem konkreten Beispiel alle einschlägigen Verhältnisse wiedergibt[88]). In diesen neun Punkten liegen also die neun Spitzen von Π, die zu den Wendetangenten von f dualistisch sind. Und je zwei Spitzen von Π liegen mit demjenigen Wendepunkt auf einer Geraden, der den harmonischen Pol bildet zu der dritten Rück-

[88]) Diese Figur wurde dem Verfasser von Herrn F. Kölmel (Baden-Baden) freundlichst zur Verfügung gestellt. S. die Fußnote 92.

kehrtangente, die mit den beiden ersten [durch] denselben Punkt geht.

Nun kennen wir aber den allgemeinen Satz, daß die gerade Polare eines Punktes von H dieselbe Kurve in dem

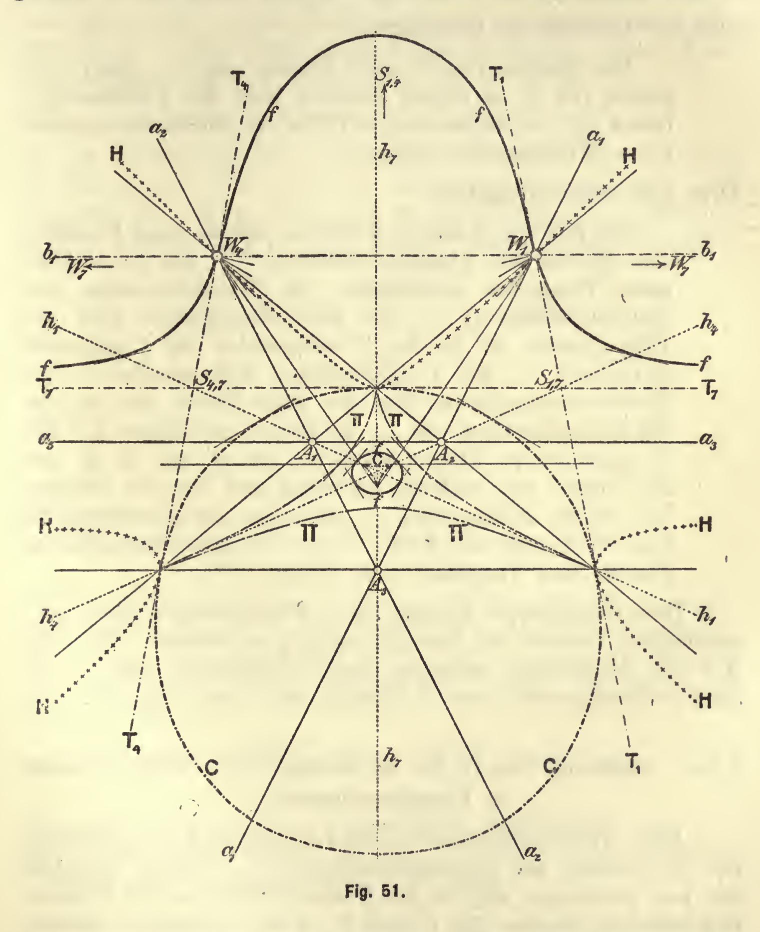


Fig. 51.

korrespondierenden Punkte berührt. Für einen Wendepunkt ist aber die Wendetangente selbst die gerade Polare. Diese berührt also H in einem Punkte, wo Π eine Spitze hat. Wir können dies so ausdrücken:

Die Wendetangenten von f sind Tangenten von H. *Die Berührungspunkte liegen in den Schnittpunkten mit den harmonischen Polaren der Wendepunkte (den Rückkehrtangenten von* Π*),*

und ins Dualistische übertragen:

Die Spitzen von Π *sind Punkte von* C. *Die Tangenten von* C *in diesen Punkten sind die Verbindungslinien mit den harmonischen Polen der Rückkehrtangenten (den Wendepunkten von f).*

Dies gibt zusammengefaßt:

Die Kurven H *und* C *berühren sich in neun Punkten, den Spitzen der Fundamentalkurve* Π. *Sie haben dort neun Tangenten gemeinsam, die Wendetangenten der Fundamentalkurve f. Die Berührungspunkte sind die Doppelpunkte der zu den Wendepunkten von f gehörigen zerfallenen* C_2 *des f zugeordneten Polarennetzes. Die Berührungstangenten sind die Doppellinien der zu den Rückkehrtangenten von* Π *gehörigen zerfallenen* C^2 *des* Π *zugeordneten Polarengewebes. Da* H *und* C *je von der dritten bez. sechsten Ordnung und von der sechsten bez. dritten Klasse sind, so sind diese Berührungspunkte und -Tangenten alle* $3 \cdot 6 = 9 \cdot 2 = 18$ *gemeinschaftlichen Punkte und Tangenten von* H *und* C [89]).

Das dualistische System der Wendepunkte und harmonischen Polaren ist hiermit völlig geschlossen. Auf die Art der Beziehung zwischen dem Polarennetz von *f* und dem Polarengewebe von Π können wir nicht eingehen.

§ 64. Gleichung von Π für die Normalform. Transformation zu Linienkoordinaten.

123. Wir schulden aber dem Leser noch die Aufstellung der Gleichung der Fundamentalkurve Π. Zuvor möchten wir nur erwähnen, daß in der Formentheorie solche Formen in Linienkoordinaten wie C und Π »Kontravarianten« heißen in bezug auf die Fundamentalform *f*. Die Methoden der In-

[89]) Diese Fassung des Textes im Vereine mit Fig. 51 stellt hoffentlich den Sachverhalt vollständig klar, der bei Schröter (auf S. 247) unvollständig und zum Teil unrichtig wiedergegeben ist.

variantentheorie gestatten natürlich, diese Kurvengleichungen ganz allgemein in symbolischer Form anzugeben, so daß all unsere Resultate in allgemeingültiger Weise algebraisch bewiesen werden können. Da wir die Kenntnis dieser Methoden nicht voraussetzen, müssen wir versuchen, auch noch Π für unsere kanonische Form elementar aufzustellen. Die Gleichung dieser Kurve muß die Form haben

$$\Pi \equiv u_1^3 + u_2^3 + u_3^3 + 6\,\theta\, u_1 u_2 u_3 = 0\,, \tag{11}$$

und es obliegt uns, den Parameter θ so zu bestimmen, daß die HESSEsche Form von Π mit C [Gleichung (10)], die CAYLEYsche Form aber mit H [Gleichung (4)] übereinstimmt. Dies führt zu den beiden Bedingungsgleichungen

$$\left\{\begin{aligned} &4\,\theta^2 - \frac{1}{\theta} = \frac{2\,m^3+1}{m^2} \qquad \text{und} \\ &\frac{1}{\theta^2} + 2\,\theta = \frac{4\,m^3-1}{m} \end{aligned}\right. \tag{12}$$

oder

$$\left\{\begin{aligned} &4\,\theta^3 - \frac{2\,m^3+1}{m^2}\,\theta - 1 = 0 \qquad \text{und} \\ &2\,\theta^3 - \frac{4\,m^3-1}{m}\,\theta^2 + 1 = 0\,. \end{aligned}\right. \tag{12*}$$

Der Natur der Aufgabe nach müssen diese beiden Gleichungen eine gemeinsame Wurzel θ_0 haben, die dann den Parameter für Π gibt. Statt allgemeine Methoden anzuwenden, addieren wir besser die beiden Gleichungen; dann kommt nach Division mit θ

$$6\,\theta^2 - \frac{4\,m^3-1}{m}\,\theta - \frac{2\,m^3+1}{m^2} = 0\,. \tag{13}$$

Eine der Wurzeln dieser quadratischen Gleichung ist θ_0 und man findet durch Auflösung von (13) und versuchsweises Einsetzen in die Gleichungen (12*), daß

$$\theta_0 = -\frac{1}{2\,m}\,.$$

Demnach ist schließlich

$$\Pi \equiv m\,(u_1^3 + u_2^3 + u_3^3) - 3\,u_1 u_2 u_3 = 0\,. \tag{14}$$

Wir überlassen es dem Leser, an der Hand dieser Gleichung im Verein mit den früheren unsere Sätze über das gegenseitige Verhalten von H und C analytisch nachzuprüfen resp. zu beweisen.

Zusatz. Wir wollen hier noch an dem einen Beispiel der HESSEschen Normalform zeigen, wie man jede in Punktkoordinaten gegebene Kurve 3. Ordg. zu Linienkoordinaten transformieren kann. Das Verfahren kann verallgemeinert werden und führt dann zu den symbolischen Methoden, die wir in Nr. 17 erwähnten. Ist nämlich die gegebene Kurve

$$f \equiv x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\,m\,x_1\,x_2\,x_3 = 0\,, \tag{3}$$

und

$$u_1\,x_1 + u_2\,x_2 + u_3\,x_3 = 0 \tag{15}$$

die Gleichung einer beliebigen Geraden, so kann man eine Koordinate, z. B. x_3, aus (3) und (15) eliminieren. Dann erhält man

$$u_3^3\,(x_1^3 + x_2^3) - (u_1\,x_1 + u_2\,x_2)^3 - 6\,m\,u_3^2\,x_1\,x_2\,(u_1\,x_1 + u_2\,x_2) = 0 \tag{16}$$

oder geordnet (mit geänderten Zeichen)

$$\left\{\begin{array}{r|r|r|r|r} u_1^3 & x_1^3 + \quad 3\,u_1^2\,u_2 & x_1^2\,x_2 + \quad 3\,u_1\,u_2^2 & x_1\,x_2^2 + u_2^3 & x_2^3 \\ -\,u_3^3 & +\,6\,m\,u_1\,u_3^2 & +\,6\,m\,u_2\,u_3^2 & -\,u_3^3 & \end{array}\right\} = 0\,. \tag{16*}$$

Dies ist eine in x_1, x_2 homogene Gleichung, deren gleich Null gesetzte Diskriminante die Bedingung gibt, daß die Gerade (15) die Kurve berührt; das ist aber nichts anderes als die Gleichung von (3) in Linienkoordinaten. Man erhält (die Diskriminante ist in Nr. 15 angegeben) nach Division mit $27\,u_3^6$

$$\left\{\begin{aligned} & u_1^6 + u_2^6 + u_3^6 - 2\,(1 + 16\,m^3)\,(u_1^3\,u_2^3 + u_2^3\,u_3^3 + u_3^3\,u_1^3) \\ & \quad - 24\,m^2\,u_1\,u_2\,u_3\,(u_1^3 + u_2^3 + u_3^3) \\ & \quad - 24\,m\,(1 + 2\,m^3)\,u_1^3\,u_2^3\,u_3^3 = 0\,. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

3. Einteilung der Kurven dritter Ordnung.

§ 65. Der Salmonsche Satz. Anwendung auf das syzygetische Büschel. Harmonische und äquianharmonische Kubiken.

124. Wenn wir nach Gesichtspunkten suchen, die uns bei einer vorzunehmenden Einteilung aller möglichen Kubiken leiten könnten, so werden wir uns zuerst der Konstanten m des syzygetischen Büschels in der kanonischen Form erinnern, von der wir in Nr. 114 beiläufig bemerkten, daß sie

eine wesentliche Konstante der Kurve sei. m selbst hat nun zwar keine geometrische Bedeutung, es gibt aber eine geometrische Größe, die nur von m abhängt, das ist das Doppelverhältnis der vier Tangenten, die man von einem Punkte P der Kurve f an diese (außer der Tangente im Punkte P selbst) noch legen kann. In welcher wichtigen Beziehung dieses Doppelverhältnis zur Kurve steht, wollen wir zuerst geometrisch zeigen.

Seien die vier von P ausgehenden Tangenten PA, PB, PC, PD [A, B, C, D die Berührungspunkte], so liegen diese vier Punkte mit P in einem Kegelschnitt, der konischen Polare von P, die mit f noch einen Punkt, nämlich den zu P auf f benachbarten P_0 gemein hat. Denken wir nun von P_0 die vier Tangenten an f gelegt, so sind diese zu PA, PB, PC, PD unendlich benachbart und schneiden diese demnach in den Berührungspunkten A, B, C, D. Daraus ergibt sich sofort die Doppelverhältnisgleichheit

$$P(A, B, C, D) \barwedge P_0(A, B, C, D),$$

d. h. *das Doppelverhältnis der vier Tangenten ändert sich nicht, wenn wir von einem Punkte der Kurve zum nächstfolgenden übergehen.* Es ist demnach dieses Doppelverhältnis für alle Punkte der Kurve das nämliche und *jede Kubik ist durch einen bestimmten Wert dieses Doppelverhältnisses,* das bekanntlich gegenüber linearer Transformation absolut invariant ist, d. h. sich auch nicht um einen Faktor ändert, *charakterisiert.* — Auf den algebraischen Beweis dieses SALMONschen[90]) Satzes müssen wir verzichten, da derselbe von den Invarianten der ternären Formen Gebrauch macht, deren Kenntnis wir nicht voraussetzen wollen.

Den Zusammenhang aber zwischen dem Doppelverhältnis σ, das eine Kubik charakterisiert und der Konstanten m, die sie im syzygetischen Büschel auszeichnet, wollen wir wenigstens angeben. Derselbe ist freilich nicht ein so ganz einfacher, daß etwa jedem Werte von m auch ein bestimmter Wert von σ entspräche und umgekehrt. Denn wir wissen, daß je nach der Anordnung, die wir bei der Bildung des Doppelverhältnisses den vier Tangenten geben, dieses sechs Werte annehmen kann:

$$\sigma,\ 1/\sigma,\ 1-\sigma,\ 1/(1-\sigma),\ 1-1/\sigma,\ 1/(1-1/\sigma),$$

[90]) Journ. f. Math. **42**, 1851, S. 274.

die sich untereinander vertauschen, wenn man statt σ in dieselben Ausdrücke irgend einen der sechs Werte einsetzt. Man wird demnach nur eine Gleichung aufstellen können, die diese sechs Werte zu gleicher Zeit ergibt. Und zwar werden die Koeffizienten dieser Gleichung symmetrische Funktionen der Koeffizienten der vorgegebenen Gleichung vierten Grades sein. Da es uns zu weit führen würde, auf die bez. Rechnungen hier einzugehen, entnehmen wir die hierher gehörigen Tatsachen der Algebra der binären Formen.

125. Ist nämlich die Gleichung vierten Grades gegeben

$$(1) \qquad a_0 x_1^4 + 4 a_1 x_1^3 x_2 + 6 a_2 x_1^2 x_2^2 + 4 a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4 = 0,$$

so hat dieselbe zwei Invarianten; nach Clebschscher Bezeichnung:

$$i = 2(a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2) \quad \text{und} \quad j = 6 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$ [91].

Dabei ist i vom Gewicht 4 und j vom Gewicht 6, d. h. wenn wir mit i' und j' die transformierten Formen bezeichnen und $\mathfrak{D}$ die Substitutionsdeterminante (der Modul der Transformation) ist, so hat man

$$i' = \mathfrak{D}^4 \cdot i \qquad \text{und} \qquad j' = \mathfrak{D}^6 \cdot j\,.$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar, daß

$$i'^3/j'^2 = i^3/j^2,$$

und die letztere Funktion der Koeffizienten ist also die absolute Invariante für die Gleichung (1). Die Beziehung zwischen dem Doppelverhältnis σ der vier durch (1) dargestellten Elemente und der absoluten Invariante lautet dann

$$(2) \qquad \frac{i^3}{j^2} = 24 \frac{(\sigma^2 - \sigma + 1)^3}{(\sigma + 1)^2 (\sigma - 2)^2 (2\sigma - 1)^2}\,.$$

---

[91]) Siehe z. B. A. Clebsch *„Theorie der binären Formen“*, Leipzig 1872, § 50, oder die Darstellung im I. Band von Clebsch-Lindemann. — Ganz elementar ist die Herleitung von Gleichung (2) bei Cesàro-Kowalewski *„Algebraische Analysis etc.“*, (Teubner 1904), § 484 b), oder auch bei Netto *„Elementare Algebra“* (Teubner 1904), § 116.

Sie ist in der Tat sechsten Grades in σ. Bevor wir aber diese merkwürdige Gleichung näher erläutern, müssen wir i und j für ein Tangentenquadrupel von einem Punkte von f aus für unsere kanonische Form

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\,m\,x_1\,x_2\,x_3 = 0 \tag{3}$$

aufstellen. Nach Nr. 15 (7) lautet die Gleichung eines solchen Quadrupels, da $f^y = 0$

$$Q \equiv \Delta_y^2 - 4\,f^x \Delta_x = 0\,. \tag{4}$$

Da der Punkt, von dem aus man das Quadrupel zieht, gleichgültig ist, nehmen wir für (y) den Wendepunkt W_1 mit den Koordinaten $0, 1, -1$. Dann ergibt sich

$$\left\{\begin{aligned} \Delta_y &\equiv \sum_1^3{}_i\, y_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 3\,(x_2^2 + 2\,m\,x_1\,x_3 - x_3^2 - 2\,m\,x_1\,x_2) \\ &\qquad\qquad\;\; = 3\,(x_2 - x_3)\,(x_2 + x_3 - 2\,m\,x_1) \\ \Delta_x &\equiv \sum_1^3{}_i\, x_i \frac{\partial f}{\partial y_i} = 3\,(x_2 + x_3 - 2\,m\,x_1)\,. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Es besteht auch wirklich Δ_y als konische Polare aus der Wendetangente und der harmonischen Polare, Δ_x als gerade Polare aus der Wendetangente allein. Hieraus erhalten wir

$$\left\{\begin{aligned} Q &= 3^2 (x_2 - x_3)^2 (x_2 + x_3 - 2\,m\,x_1)^2 - 4 \cdot 3\,(x_2 + x_3 - 2\,m\,x_1)\,f^x \\ &= 3\,(x_2 + x_3 - 2\,m\,x_1)\,\{3\,(x_2 - x_3)^2\,(x_2 + x_3 - 2\,m\,x_1) \\ &\quad - 4\,(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\,m\,x_1\,x_2\,x_3)\} = 0\,. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Schneiden wir nun dieses Quadrupel, um für die Aufstellung der Gleichung (2) eine binäre Form zu erhalten, etwa mit $x_3 = 0$, so ergibt sich

$$(2\,m\,x_1 - x_2)\,(4\,x_1^3 + 6\,m\,x_1\,x_2^2 + x_2^3) = 0 \tag{7}$$

oder ausmultipliziert

$$8\,m\,x_1^4 - 4\,x_1^3\,x_2 + 12\,m^2\,x_1^2\,x_2^2 - 4\,m\,x_1\,x_2^3 - x_2^4 = 0\,, \tag{7*}$$

so daß also

$$a_0 = 8\,m\,; \quad a_1 = -1\,; \quad a_2 = 2\,m^2\,; \quad a_3 = -m\,; \quad a_4 = -1$$

und demnach

$$i = 24\,m\,(m^3 - 1) \qquad \text{und} \qquad j = -6\,(8\,m^6 + 20\,m^3 - 1)\,.$$

Gleichung (2) wird dann

$$(8)\qquad \frac{16\,m^3(m^3-1)^3}{(8\,m^6+20\,m^3-1)^2}=\frac{(\sigma^2-\sigma+1)^3}{(\sigma+1)^2(\sigma-2)^2(2\,\sigma-1)^2}$$

und es gibt infolgedessen in dem syzygetischen Büschel für jedes bestimmte Doppelverhältnis σ 12 im allgemeinen voneinander verschiedene Kurven, die nur, wenn σ einen Wert hat, der der Gleichung $\sigma^2-\sigma+1=0$ genügt, zu je dreien und wenn σ eine der Gleichungen $\sigma+1=0$, $\sigma-2=0$ oder $2\,\sigma-1=0$ befriedigt zu je zweien zusammenfallen. Gerade diese Werte von σ sind aber die bekannten ausgezeichneten Werte des Doppelverhältnisses. Im ersteren Falle ist σ eine der imaginären Wurzeln der Gleichung $\sigma^3=1$ und es fallen je drei der sechs Werte zusammen; dies ist das äquianharmonische Doppelverhältnis. Im zweiten Falle wird, wenn $\sigma=-1$, zugleich $1/\sigma=-1$ und die übrigen vier Werte werden zu je zweien gleich 2 resp. $\frac{1}{2}$; gerade dies wird aber durch die Faktoren des Nenners der rechten Seite angezeigt; das ist das harmonische Doppelverhältnis.

126. Indem wir die Kurven, die diesen Doppelverhältnissen entsprechen, auch mit dem entsprechenden Namen bezeichnen, können wir sagen:

In dem syzygetischen Büschel sind für jedes gegebene Doppelverhältnis σ 12 Kurven vorhanden; doch gibt es nur vier harmonische und sechs äquianharmonische Kurven.

Von all diesen Kurven ist aber nur ein Teil reell. So muß für die äquianharmonischen Kurven $i=0$ sein, was nur zwei reelle Werte von m, und für die harmonischen $j=0$, was gleichfalls nur zwei reelle Werte von m ergibt.

Ist $\sigma=1$, 0 oder ∞, so fallen auch je zwei der sechs Werte des Doppelverhältnisses zusammen und sind bez. $1, 0, \infty$. Dann koinzidieren aber in Gleichung (7*) zwei Tangenten, d. h. die Kurve muß einen Doppelpunkt haben. Die Bedingung dafür, d. h. die Diskriminante der Gleichung (7*) ist also

$$\mathfrak{R}\equiv i^3-6j^2=0\,.$$

Rechnet man dies in m aus, so ergibt sich

$$512\,m^9+192\,m^6+24\,m^3+1\equiv(8\,m^3+1)^3=0\,.$$

Das gibt die uns bekannten drei Achsendreiseite, deren viertes durch $m = \infty$ repräsentiert wird.

Die harmonischen bzw. äquianharmonischen Kurven sind aber auch geometrisch ausgezeichnet. Betrachten wir zuerst die letzteren, für welche $i = 0$, so bemerken wir, daß die vier Wurzeln dieser Gleichung, nämlich $0, 1, \varepsilon, \varepsilon^2$ gerade diejenigen vier Werte von m sind, für welche die Hessesche Kurve der Grundkurve eines der vier Achsendreiseite ist. Wir haben hier eine Bestätigung für die Wahrheit der Behauptung, daß die Grundkurve eine bestimmte invariante Eigenschaft besitzen muß, wenn die Hessesche Kurve Singularitäten hat (vgl. S. 59). Zugleich zerfällt bei dieser Art von Kubiken die Cayleysche Kurve in die drei Ecken des betreffenden Achsendreiseits. Daraus ergibt sich sofort die weitere geometrische Eigenschaft, die diese äquianharmonischen Kubiken charakterisiert, daß die Wendetangenten einer solchen zu dreien durch die drei Ecken des zugehörigen Achsendreiseits, das die Hessesche Kurve bildet, laufen; denn sie sind nach Nr. 35 Tangenten der Cayleyschen Kurve.

Die harmonischen Kubiken haben die Eigenschaft, daß die Hessesche Kurve von H wieder mit f zusammenfällt. Wir können dies direkt bestätigen. Dazu müssen wir nur die Gleichung bilden

$$\frac{1 + 2\,\mathrm{M}^3}{\mathrm{M}^2} = -6\,m, \quad \text{wo} \quad \mathrm{M} = -\frac{1 + 2\,m^3}{6\,m^2}$$

einzusetzen ist. Man erhält nach Abscheidung eines Faktors 2 die Gleichung

$$64\,m^9 + 168\,m^6 + 12\,m^3 - 1 = 0\,. \tag{9}$$

Dies kann für einen Augenblick überraschen, da man erwartete $j = 0$ (sechsten Grades in m) zu erhalten. Es ist jedoch

$$\begin{aligned}64\,m^9 + 168\,m^6 + 12\,m^3 - 1 &\equiv (8\,m^6 + 20\,m^3 - 1)(8\,m^3 + 1)\\ &= -\tfrac{1}{6}(8\,m^3 + 1)\cdot j\,,\end{aligned}$$

wo der unwesentliche kubische Faktor wiederum die drei endlichen Werte von m gibt, die Achsendreiseiten entsprechen; für diese ist ja die geforderte Eigenschaft selbstverständlich.

§ 66. Die Kölmel-Wienersche Einteilung der Kubiken.

127. Die eben entwickelten Resultate können wir benutzen, um zu einer wesentlichen Einteilung der Kurven 3. Ordg. zu gelangen, d. h. zu einer Einteilung nach den durch Projektion unzerstörbaren Eigenschaften, die demnach zugleich eine Klassifikation aller möglichen Kegel 3. Ordg. ist. Wir werden uns die Kurven, denen die oben betrachteten ausgezeichneten Werte des Doppelverhältnisses entsprechen, in einer Reihe angeschrieben denken, die wir nach der Größe von m ordnen können, da es sich doch nur um eine Einteilung der reellen Kubiken handelt. Alle Kurven aber, die in den Gebieten zwischen zwei solchen ausgezeichneten Kubiken, die wir als »Grenzkurven« betrachten, liegen, werden wir zu ein und derselben Gattung rechnen. Zu den Grenzkurven gehören dann zwei Dreiseite $\triangle$ und $\triangle'$ (für $m = -\frac{1}{2}$ und $m = \infty$), von denen das erste eine reelle, das zweite drei reelle Seiten hat, ferner die beiden reellen äquianharmonischen Kubiken A und A' und die beiden reellen harmonischen Kubiken H_1 und H_2. Schreiben wir diese sechs Grenzkurven auf einem Kreise an, so gibt es sechs Zwischengebiete und wir erhalten zwölf Formen, von denen wir die zwei Dreiseite als uneigentliche Kurven ausscheiden. Schicken wir die drei rationalen Formen noch voraus, so erhalten wir eine in sich geschlossene Einteilung der Kubiken in 13 Gattungen, die in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind. Diese Einteilung wurde zuerst von F. Kölmel[92]) vom rein algebraischen Standpunkt aus gegeben und bald darauf hiervon unabhängig von H. Wiener[93]) durch rein

[92]) *„Ableitung der verschiedenen Formen der Kurven dritter Ordnung durch Projektion und Klassifikation derselben."* I. Progr. Realprogymn. Ettenheim 1894, 12 S. 4° mit 4 Tfln. — II. Progr. Realprogymn. Mosbach 1895, 12 S. 4° mit 3 Tfln. — III. Progr. Oberrealsch. Baden-Baden 1904, 14 S. 4° mit 2 Tfln.

[93]) *„Die Einteilung der ebenen Kurven und Kegel dritter Ordnung in 13 Gattungen."* Halle a. S. (Schilling) 1901, 34 S. mit 2 Fig. — Wir haben in unserer Darstellung beide Standpunkte vereinigt, indem wir mit Wiener vom syzygetischen Büschel ausgingen, die Anordnung in demselben aber mit Hilfe der Invarianten i, j, $\mathfrak{R}$ diskutierten. Freilich benutzt Kölmel die Invarianten $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ der allgemeinen ternären kubischen Form. Diese sind aber für die Hessesche Normalform mit i und j bis auf Zahlenfaktoren identisch. Da Kölmel die Einteilung nach dem Vorzeichenwechsel von $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{R}$ vornimmt, hat er auch eine andere Reihenfolge.

geometrische Betrachtungen gewonnen. Wir werden sie daher die KÖLMEL-WIENERsche Einteilung nennen. Die Bezeichnung der Tabelle ist nach WIENER. Ein Strich an dem Buchstaben oder der Ziffer deutet an, daß die beiden Kurven oder Gebiete durch eine imaginäre Kollineation ineinander übergeführt werden können, worüber man näheres in WIENERs Abhandlung nachsehen möge.

Kurven vom Geschlechte Null.

1. S Kurve mit Spitze.
2. D Kurve mit Knoten.
3. D′ Kurve mit isoliertem Punkt.

Kurven vom Geschlechte Eins.

△ Dreiseit mit einer reellen Seite und einer reellen Ecke ($m = -\frac{1}{2}$). } $\mathfrak{R} = 0$.

4. I Gebiet zwischen △ und H_1 (die Seite wird zu einer Serpentine, die Ecke zu einem Oval).
5. H_1 Zweiteilige harmonische Kurve
$$\left(m = -\sqrt[3]{\frac{5+3\sqrt{3}}{4}}\right).$$
6. I′ Gebiet zwischen H_1 und △′.

} $\mathfrak{R} < 0$.

△′ Dreiseit mit drei reellen Seiten ($m = \infty$; Übergang zwischen den zweiteiligen und einteiligen Kurven). } $\mathfrak{R} = 0$.

7. II Gebiet zwischen △′ und A.
8. A I. äquianharmonische Kurve ($m = 1$; $H \equiv$ △; die drei reellen Wendetangenten gehen durch die reelle Ecke von △).
9. III Gebiet zwischen A und H_2.
10. H_2 Einteilige harmonische Kurve
$$\left(m = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}-5}{4}}\right).$$
11. III′ Gebiet zwischen H_2 und A′.
12. A′ II. äquianharmonische Kurve ($m = 0$; $H \equiv$ △′; die drei reellen Wendetangenten laufen je durch eine Ecke von △′, schneiden sich also nicht in einem Punkt).
13. II′ Gebiet zwischen A′ und △.

} $\mathfrak{R} > 0$.

△ Dreiseit mit einer reellen Seite ($m = -\frac{1}{2}$; Übergang zwischen den einteiligen und zweiteiligen Kurven). $\Big\}$ $\mathfrak{R} = 0$.

§ 67. Zusammenhang mit der Newtonschen 5-Teilung und anderen Einteilungen.

128. Diese Einteilung der Kurven dritter Ordnung ist durchaus abgeschlossen. „Sie kann, wie Wiener sagt, ohne völlige Änderung des Teilungsgrundes weder eingeschränkt noch erweitert werden." Man kann sie nur einschränken, indem man auf feinere Unterschiede verzichtet und etwa außer den drei ersten Arten überhaupt nur noch ein- und zweiteilige Kurven unterscheidet. In der Tat war dies, historisch betrachtet, der erste Standpunkt, der von Newton in seiner „*Enumeratio linearum tertii ordinis*"[94]) zugrunde gelegt wurde.

Fig. 52.

Um Newtons Gedankengang klar zu legen, stellen wir die allgemeine Gleichung einer Kubik auf, indem wir die Ecke *II* des Koordinatensystems in einen reellen Wendepunkt legen, wo x_3 die Tangente, x_1 irgend eine durch den Wendepunkt gehende Linie sei. x_2 sei aber die harmonische Polare des Wendepunktes. Denken wir uns sodann alle zehn Glieder der Kurve angeschrieben, so müssen, weil $x_3 = 0$ Wendetangente sein soll, die Glieder mit $x_1^2 x_2$, $x_1 x_2^2$ und x_2^3 verschwinden. Setzen wir nun $x_3 = \lambda x_1$, so bemerken wir, daß wegen der harmonischen Eigenschaften von

[94]) Diese Schrift ist enthalten z. B. in „*Isaaci Newtoni Opera quae exstant omnia*", comm. S. Horsley, Lond. 1779—1785, T. I, S. 531—560 und wurde i. J. 1704 veröffentlicht.

$x_2 = 0$ auch diejenigen Glieder verschwinden müssen, die $x_1 x_2 x_3$ und $x_2 x_3^2$ enthalten, da diese nach unserer Substitution und nach Division mit x_1 zu Gliedern mit $x_1 x_2$ Veranlassung gäben. Die noch übrigen Glieder lassen sich dann in folgender Weise anordnen:

$$x_2^2 x_3 = a x_1^3 + 3 b x_1^2 x_3 + 3 c x_1 x_3^2 + d x_3^3 . \tag{9}$$

Wenn wir, da die Beziehung zum Unendlichfernen unwesentlich sein soll, $x_3 \equiv z$ setzen und statt x_2, x_1 bez. y, x einführen, so gibt dies die Gleichung

$$y^2 = a x^3 + 3 b x^2 + 3 c x + d . \tag{10}$$

In diese Form kann demnach jede Kurve 3. Ordg. gebracht werden. Es ist eine reelle Wendetangente unendlich fern und die zugehörige harmonische Polare ist die x-Achse. Die Kurve ist infolgedessen, wie auch die Gleichung zeigt, symmetrisch zur x-Achse und strebt mit divergierenden Ästen ins Unendliche. NEWTON nannte diese Kurvenformen daher »divergierende Parabeln«. Zur Unterscheidung der möglichen Arten denken wir uns die rechte Seite von Gleichung (10) in ihre linearen Faktoren zerlegt, so daß aus (10) wird

$$y^2 = a (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) . \tag{10*}$$

Dann kann man mit NEWTON folgende fünf Fälle unterscheiden:

I. $\alpha < \beta < \gamma$ (alle Wurzeln reell). Dies gibt einen unendlichen Zweig und ein Oval, d. i. den Typus der zweiteiligen Kubik (Kurve *2* der Figur 52).

II. $\beta = \gamma \gtrless \alpha$. Das Oval hat sich auf einen isolierten Punkt zusammengezogen (Kurve *3*).

III. $\alpha = \beta \gtrless \gamma$. Diese Form geht aus *2* hervor, indem sich das Oval und der unendliche Zweig in einem Knoten vereinigen (Kurve *1*).

IV. β und γ sind konjugiert imaginär. Geht aus *3* hervor dadurch, daß der isolierte Punkt verschwindet: Typus der einteiligen Kurve (Kurve *4*).

V. $\alpha = \beta = \gamma$. Dies ist die Kubik mit Spitze (Kurve *5*).

129. Aus diesen fünf Formen ließen sich, behauptete NEWTON, alle Kubiken durch Projektion (als Schatten) ableiten. Das ist natürlich cum grano salis zu nehmen. Denn es gibt ∞^1 projektivisch verschiedene Kegel 3. Ordg. Wir

sehen übrigens auch an der eben aufgestellten 5-Teilung sofort, daß der Fall, wo α und β konjugiert imaginär sind, der aus *1* durch »Verbinden« am Knoten hervorgeht, zu einer einteiligen Kurve führt, die von *4* wesentlich verschieden ist. Denn ziehen wir die drei reellen Wendetangenten und die zugehörige Inflexionsachse, so wird die Ebene durch diese vier Geraden in vier dreieckige und drei viereckige Felder geteilt. Kurve *4* verläuft nun ganz innerhalb der dreieckigen Felder (»Dreieckskurve«) und die eben betrachtete Kubik ganz innerhalb der viereckigen Felder (»Viereckskurve«). Dazwischen liegt offenbar eine Übergangsform, für welche die drei Wendetangenten sich in einem Punkte schneiden (in unserem Falle parallel zur x-Achse laufen). Diese entspricht der äquianharmonischen Kurve A [8] der KÖLMEL-WIENERschen Einteilung und die NEWTONsche 5-Teilung ist dadurch schon auf eine 7-Teilung gebracht, die von MÖBIUS[95]) und CAYLEY[96]) näher betrachtet wurde, aber auf MURDOCH[97]) zurückgeht. Vergleichen wir diese 7-Teilung mit der KÖLMEL-WIENERschen Einteilung, so erkennen wir das Gebiet II als das der Viereckskurven, während 9—13 als einteilige Dreieckskurven und 4—6 als zweiteilige Kurven in eine Gattung zusammengefaßt sind. Die feineren Unterschiede dieser Kurven werden in der Tat erst dann augenfällig, wenn man die verschiedenen ko- und kontravarianten Kurven einzeichnet, was man in den Figurentafeln der KÖLMELschen Arbeiten nachsehen kann[98]).

Es möge nur noch bemerkt werden, daß zur Diskussion in diesem Sinne besonders von CAYLEY die kanonische Form

$$(x_1 + x_2 + x_3)^3 + 6\,k\,x_1\,x_2\,x_3 = 0 \tag{11}$$

[95]) *„Über die Grundformen der Linien der dritten Ordnung"*, 1852. *Gesammelte Werke* Bd. II, S. 90.

[96]) *„On the Classification of Cubic Curves."* Trans. Cambr. Phil. Soc. **11**, 1865, S. 81—128. — *„On Cubic Cones and Curves."* Ebd. S. 129—144. — CAYLEY setzt auch NEWTONS Einteilung mit der von PLÜCKER in seinem *System der analytischen Geometrie* (L. V.) S. 123—292 gegebenen, mit 59 Figuren versehenen Einteilung in Beziehung.

[97]) *„Genesis Curvarum per Umbras."* London 1746.

[98]) So ist es ein Charakteristikum der harmonischen Kubiken, daß die Spitzen von C auf f liegen und die Wendetangenten von H Π berühren. Vgl. hierzu einen in der Hauptsache geometrischen Aufsatz von CHARLOTTE SCOTT *„On plane cubics"* in Phil. Trans. R. S. London (A) **185**, 1894, S. 247—277 mit vielen Figuren.

benutzt wurde, eine Form, die uns aus Nr. 100 schon bekannt ist und entsteht, wenn die drei reellen Wendetangenten das Koordinatendreiseit bilden, während $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ die Verbindungslinie der drei Wendepunkte ist, die hier als Einheitsgerade auftritt.

Beisp. Nimmt man die drei Wendepunkte unendlich fern und sind $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ die Gleichungen der drei Wendetangenten, so stellt $PQR = \lambda$ Dreiecks- oder Viereckskurven dar,

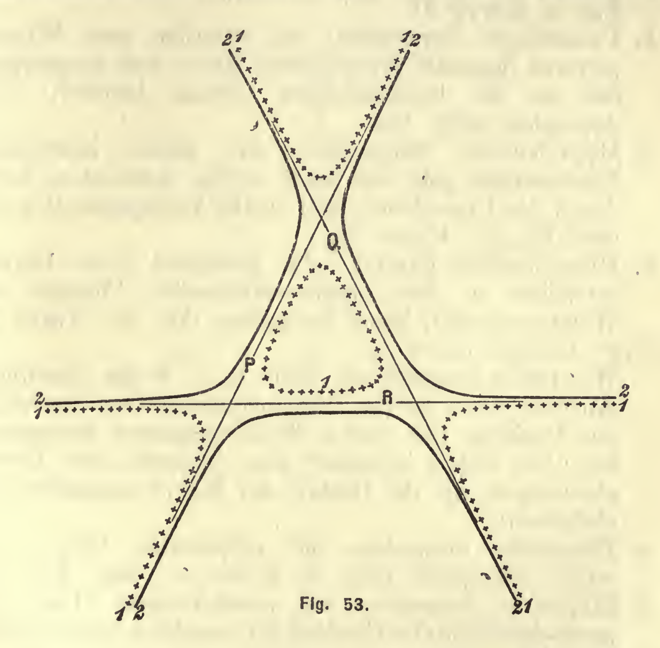


Fig. 53.

je nachdem $\lambda \gtrless 0$ ist. Das Dreieck der Wendetangenten für $\lambda = 0$ bildet den Übergang. Die Dreieckskurven sind aber für kleine λ zunächst zweiteilig. In Fig. 53 stellt Kurve *1* den Typus der Dreieckskurven, Kurve *2* den Typus der Viereckskurven mit drei unendlichfernen Wendepunkten dar.

§ 68. Aufzählung der gestaltlich verschiedenen Kubiken.

130. Wir gewinnen alle möglichen Gestalten der Kubiken, wenn wir nun von der KÖLMEL-WIENERschen 13-Teilung

ausgehend jede der dort auftretenden Typen in verschiedene Lagen zur unendlichfernen Geraden bringen. Dies wurde in der Tat von KÖLMEL in den zitierten Arbeiten durchgeführt. Für unsere Zwecke genügt es aber, wenn wir von der NEWTONschen 5-Teilung ausgehen. Dann können wir folgende Aufstellung machen:

I. Einteilige Kurven.

a. Elliptische Serpentine; eine reelle Asymptote (z. B. Fig. 2, Kurve *2*).

b. Parabolische Serpentine; ein zwischen zwei Wendepunkten liegendes Kurvenstück ist so weit ausgezogen, daß es die unendlichferne Gerade berührt; eine Asymptote (Fig. 14).

c. Hyperbolische Serpentine; das vorhin betrachtete Kurvenstück geht mit zwei reellen getrennten Ästen durch das Unendliche; drei reelle Asymptoten (Fig. 48 oder Fig. 53, Kurve *2*).

d. Divergierende Parabel; die unendlich ferne Gerade schneidet in drei zusammenfallenden Punkten (ist Wendetangente); keine Asymptote (Fig. 52, Kurve *4*).

II. Zweiteilige Kurven.

Wir haben zunächst die Fälle b, c, d der einteiligen Kurven, denen je ein ellipsenähnliches Oval innerhalb des Dreiecks der reellen Wendetangenten beizugeben ist. Der Fall a erfordert aber folgende drei Unterabteilungen, die die Gestalt der Kurve wesentlich beeinflussen:

α. Elliptische Serpentine mit elliptischem Oval; eine reelle Asymptote (Fig. 2, Kurve *2′* oder Fig. 46).

β. Elliptische Serpentine mit parabolischem Oval; das parabelähnliche Oval berührt die unendlich ferne Gerade; eine Asymptote.

γ. Elliptische Serpentine mit hyperbolischem Oval; das Oval geht mit zwei reellen Ästen durchs Unendliche; drei reelle Asymptoten (Fig. 49).

Ein Beispiel für eine dem Falle c entsprechende Kurve ist die mit *1* bezeichnete in Fig. 53.

III. Kurven mit isoliertem Punkt.

Die Kurven dieser Gattung erhalten wir aus den zweiteiligen Formen durch Zusammenziehen des Ovals. Es gibt also je einen den Abteilungen a, b, c, d von I

entsprechenden Fall und einen fünften, wenn der isolierte Punkt im Unendlichen liegt. Die drei reellen harmonischen Polaren laufen durch den isolierten Punkt.

IV. Kurven mit Knoten.

Da diese Kubiken aus den zweiteiligen entstehen, indem das Oval an den mit drei reellen Wendepunkten behafteten Zweig rückt, so haben wir, solange der Knoten im Endlichen liegt, sechs den sechs zwei-

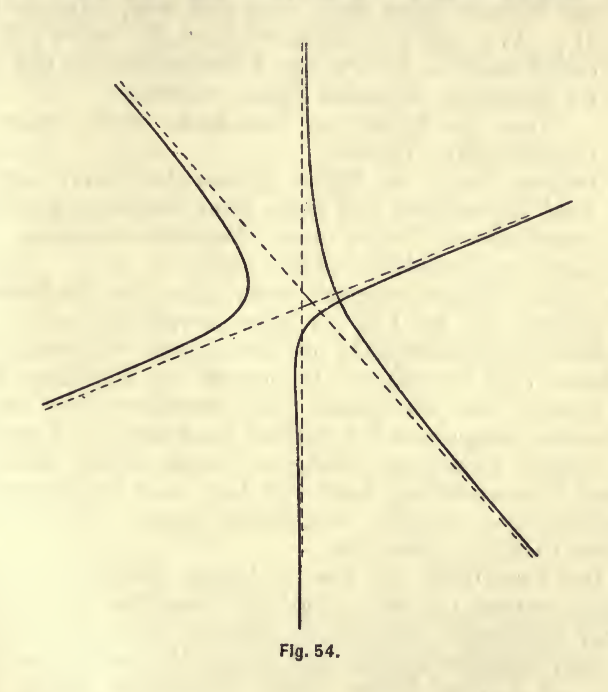


Fig. 54.

teiligen Formen entsprechende Arten zu unterscheiden. Für den Fall **a** (α) ist Kurve *1* der Fig. 2, für den Fall a (γ) die Kurve der Fig. 54 (s. Beisp. 3 von Nr. 63) ein Beispiel. Für die übrigen wird sich der Leser wohl selbst leicht Skizzen machen.

Liegt aber der Knoten auf der unendlichfernen Geraden, so daß die Kurve zwei parallele Asymptoten hat, so kann die unendlich ferne Gerade außerdem noch

a) die Schleife (Fig. 18),
b) den unendlichen Zweig schneiden (Fig. 17),
c) selbst Tangente im Knoten sein, so daß sie keinen weiteren Punkt mit der Kurve gemein hat (Trident, Fig. 19).

V. Kurven mit Spitze.

Die Spitze entsteht aus dem Knoten durch Zusammenziehen der Schleife. Von den neun Formen mit Knoten fallen dann aber drei weg, nämlich II β, II γ, IV a und wir haben zunächst die vier Fälle, die den Formen a, b, c, d von I entsprechen, je mit einer im Endlichen liegenden Spitze versehen.

Wenn die Spitze ins Unendliche rückt, kann die unendlichferne Gerade

a) beliebig durch die Spitze gehen; die Kurve hat nur zwei Asymptoten und längs einer derselben gehen auf verschiedenen Seiten nach derselben Richtung zwei Äste ins Unendliche [Fig. 15(c)].
b) selbst Rückkehrtangente sein; dies gibt die kubische Parabel (a) der Fig. 15 (ohne Asymptote).

Rückt ein Wendepunkt ins Unendliche, so überschneidet die Kurve die betreffende Asymptote im Endlichen nicht und kommt, wie wir wissen, auf derselben Seite zurück. Die hieraus entspringenden Formen kann man als Varietäten der vorigen Einteilung beifügen. Auch würde sich eine weitere Untereinteilung nach der Lage der Begleiterin der unendlichfernen Geraden vornehmen lassen, wie dies besonders Plücker getan hat.

Der Leser aber, der uns bis hierher gefolgt ist, ist hinlänglich vertraut mit allen möglichen Gestalten der Kubiken, so daß wir diesen Gegenstand verlassen können. Es möge nur noch bemerkt werden, daß unsere Untersuchungen sich sofort auf Kurven dritter Klasse übertragen ließen. Die Grundformen der letzteren sind uns ja schon aus Nr. 24a bekannt. Ihre Projektionen wird sich der Leser selbst leicht herstellen[99]).

---

[99]) Wir verweisen den Leser, der hiermit etwa nicht bekannt sein sollte, auf die übersichtliche und leicht verständliche Darstellung der Zentralkollineation bei Doehlemann, I. Bd., § 17. — Auch der bez. Abschnitt in Chr. Wieners *„Lehrbuch der darstellenden Geometrie"*, I. Bd., S. 243—252 mag nachgesehen werden.

§ 69. Die Graßmannsche Erzeugung der Kurven dritter Ordnung.

130 a. Wir dürfen diesen Abschnitt nicht schließen, ohne noch einer anderen Erzeugungsart der Kurven 3. Ordg. zu gedenken, die, von H. G. GRASSMANN begründet [*Die lineale Ausdehnungslehre,* Leipzig 1844], einen mehr mechanischen Charakter trägt, wenn auch der hierzu gehörige sogenannte »lineale Mechanismus« nicht exakt gebaut werden kann, sondern schlottert [s. F. KLEIN[4]), S. 269].

Die GRASSMANNsche Erzeugung einer Kubik lautet nun folgendermaßen:

Sind drei feste Punkte gegeben (Y, Z, T) und drei feste Gerade (U, V, W), *so beschreibt ein beweglicher Punkt P eine Kubik, wenn die drei Verbindungslinien PY, PZ, PT die drei Geraden* U, V, W *bez. in drei Punkten P_1, P_2, P_3 schneiden, die auf einer Geraden* (P) *liegen.*

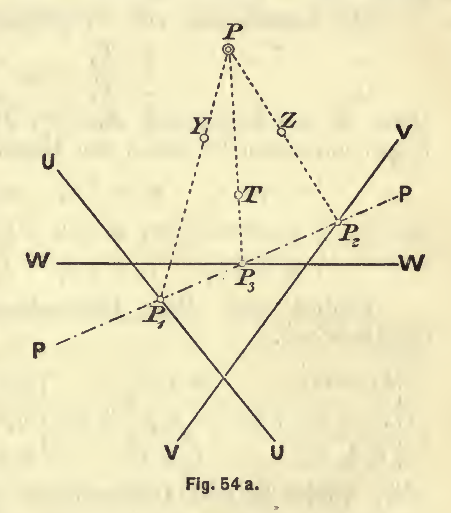


Fig. 54 a.

Da diese Erzeugung vollständig »lineal« ist, d. h. nur Punkte und Gerade und deren gemeinsame Elemente benutzt, können wir sie ohne weiteres ins Dualistische übertragen und, indem wir dieselben festen Punkte und Geraden voraussetzen, sagen:

> *Bewegt sich eine Gerade* P *so, daß ihre Schnittpunkte P_1, P_2, P_3 mit den Geraden* U, V, W, *mit den drei Punkten Y, Z, T verbunden drei Gerade* (P_1, P_2, P_3) *geben, die durch einen Punkt (P) laufen, so beschreibt die Gerade eine Kurve 3. Klasse.*

Wir sehen (Fig. 54 a), daß beide Gebilde immer zugleich entstehen, indem der Punkt P eine Ordnungskubik, die Gerade P

eine Klassenkubik beschreibt. Die Gleichung der Ordnungskubik wollen wir nun aufstellen und damit unseren Satz beweisen.

Gegeben sind die Punkte und Geraden mit den Koordinaten:

$$\begin{array}{ll} Y(y_1, y_2, y_3) & \mathsf{U}(u_1, u_2, u_3) \\ Z(z_1, z_2, z_3) & \mathsf{V}(v_1, v_2, v_3) \\ T(t_1, t_2, t_3) & \mathsf{W}(w_1, w_2, w_3). \end{array}$$

Habe der variable Punkt P die Koordinaten x_1, x_2, x_3, so können wir setzen:

die Koordinaten von P_1 proportional zu $y_i + \lambda x_i$,
" " " P_2 " " $z_i + \mu x_i$,
" " " P_3 " " $t_i + \nu x_i$.

Dann ist die Bedingung, daß P_1, P_2, P_3 auf einer Geraden liegen, ausgedrückt durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} y_1 + \lambda x_1 & y_2 + \lambda x_2 & y_3 + \lambda x_3 \\ z_1 + \mu x_1 & z_2 + \mu x_2 & z_3 + \mu x_3 \\ t_1 + \nu x_1 & t_2 + \nu x_2 & t_3 + \nu x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Spaltet man diese Determinante, so findet man sie identisch mit

$$1 \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix} + x_3 \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \lambda \\ z_1 & z_2 & \mu \\ t_1 & t_2 & \nu \end{vmatrix} + x_2 \cdot \begin{vmatrix} y_1 & \lambda & y_3 \\ z_1 & \mu & z_3 \\ t_1 & \nu & t_3 \end{vmatrix} + x_1 \cdot \begin{vmatrix} \lambda & y_2 & y_3 \\ \mu & z_2 & z_3 \\ \nu & t_2 & t_3 \end{vmatrix} = 0,$$

oder, wieder in eine Determinante gefaßt,

$$\mathfrak{D} \equiv \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ -\lambda & y_1 & y_2 & y_3 \\ -\mu & z_1 & z_2 & z_3 \\ -\nu & t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Nun ist zu beachten, daß z. B. die Koordinaten $y_i + \lambda x_i$ die Gerade U erfüllen müssen. Dies gibt die Gleichung

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 + \lambda (u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3) = 0.$$

Setzen wir [gemäß der Aronhold-Clebschschen Symbolik (s. Nr. 17)] zur Abkürzung

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 \equiv u_y,$$

so erhalten wir in dieser Weise drei Gleichungen

$$\begin{array}{r|r} u_y + \lambda u_x = 0 & -\lambda = \dfrac{u_y}{u_x} \\ v_z + \mu v_x = 0 & -\mu = \dfrac{v_z}{v_x} \\ w_t + \nu w_x = 0 & -\nu = \dfrac{w_t}{w_x} \end{array}.$$

Setzt man die so erhaltenen Werte von $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu$ in $\mathfrak{D}$ ein, so ergibt sich als Gleichung des gesuchten Ortes schließlich die, wie zu beweisen, in x_1, x_2, x_3 kubische Gleichung

$$\begin{vmatrix} (u_x \cdot v_x \cdot w_x) & x_1 & x_2 & x_3 \\ (u_y \cdot v_x \cdot w_x) & y_1 & y_2 & y_3 \\ (u_x \cdot v_z \cdot w_x) & z_1 & z_2 & z_3 \\ (u_x \cdot v_x \cdot w_t) & t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

In ganz entsprechender Weise hätte sich die Gleichung der durch die Gerade P erzeugten Klassenkubik aufstellen lassen.

Bem. Um nicht zu weit abzuschweifen, wollen wir es uns hier versagen, darzutun, wie man denn auf irgend einer Kubik die zu gebenden Elemente wählen muß, um sie auf Grassmannsche Art zu erzeugen. Es genügt uns, den Leser angeregt zu haben, dies und den naheliegenden Zusammenhang der Grassmannschen Erzeugung mit der Schröterschen (Nr. 120) und Chaslesschen (§ 54) bei Clebsch-Lindemann (I_2, S. 536—541) nachzusehen.

Aber einen wichtigen Gesichtspunkt müssen wir hervorheben. Grassmann hat gezeigt, daß man durch ähnliche, freilich immer komplizierter werdende lineale Mechanismen jede algebraische Kurve erzeugen kann. *Eine algebraische Kurve kann demnach geradezu geometrisch dadurch definiert werden, daß sie durch einen linealen Mechanismus erzeugbar ist.* Und zwar hängt die Ordnung n [Klasse ν] der erzeugten Kurve davon ab, wie oft der Punkt P [die Gerade P] bei der Konstruktion benutzt wurde. Es muß hier genügen, wenn wir noch die Erzeugung eines Kegelschnitts als Ordnungs- und Klassenkurve auf Grassmannsche Art angeben, eine Erzeugung, die sich sofort auf projektive Strahlenbüschel [Punktreihen] zurückführen läßt und schon Maclaurin bekannt war:

Sind drei feste Punkte gegeben (Y, Z, T) und zwei feste Gerade (U, V), *so beschreibt ein beweglicher Punkt P eine C_2, wenn die zwei Verbindungslinien PY, PZ die zwei Geraden* U, V *bez. in zwei Punkten P_1, P_2 schneiden, die mit T in einer Geraden liegen.*

Sind drei feste Gerade gegeben (U, V, W) *und zwei feste Punkte (Y, Z), so beschreibt eine bewegliche Gerade* P *eine C^2, wenn die zwei Schnittpunkte P_1, P_2 von* P *mit* U, *bez.* V, *mit Y resp. Z verbunden zwei Gerade geben, die sich auf* W *schneiden.*

ABSCHNITT XIII.

KURVEN VIERTER ORDNUNG.

1. Allgemeines.

§ 70. Zusammensetzung jeder Quartik aus paaren und unpaaren Zügen.

131. Wenn wir uns nun zu Kurven 4. Ordg. wenden, so wird uns vor allem die Frage nach der Gestalt derselben beschäftigen, da für Quartiken so einfache, allgemeine Lagenverhältnisse betreffende Sätze wie bei den Kubiken nicht existieren. Wir konnten in den letzten Abschnitten, im Zusammenhang mit früher schon gegebenen Beispielen und Figuren eine ziemlich vollständige Übersicht der möglichen Gestalten einer Kubik, sogar mit Berücksichtigung des Unendlichfernen geben. Der Leser wird aber nicht erstaunen, wenn wir ihm vorweg mitteilen, daß wir dasselbe für Quartiken innerhalb des Rahmens unserer Darstellung nicht zu tun imstande sein werden. Wir müßten uns mindestens die Beschränkung auferlegen, jeden Typus nur in der Form zu geben, in welcher er die wenigsten Äste durchs Unendliche schickt, und noch die weitere, für jeden Typus nur die Maximalzahl der getrennten Zweige, die er haben kann, anzugeben. Dieselben Beschränkungen auf Kubiken angewendet, würden dort überhaupt bloß eine einzige nicht singuläre Form ergeben. Bei Quartiken aber dürfte es selbst dann noch weit über 200 Formen geben, die sofort ins Auge fallende Unterschiede aufweisen[100]). Gleichwohl ist es durch-

[100]) Die Grundlage für das Folgende bildet die Abhandlung von ZEUTHEN: *„Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième ordre“*. Math. Ann. **7**, 1874, S. 410—432. — Es sind dann erst im letzten Jahrzehnt fast zu gleicher Zeit (in Amerika) zwei voneinander unabhängige Versuche gemacht worden, eine voll-

aus möglich und kaum schwierig, all diese Formen zu übersehen und wir hoffen dem Leser im folgenden, wenn wir Vollständigkeit auch nicht anstreben können, doch ein so deutliches Bild von den Grundeigenschaften der Quartikentypen und von ihren Übergängen zu entwerfen, daß er hiernach imstande sein wird, sich jede beliebige Kurve 4. Ordg. näherungsweise aufzuzeichnen.

Es ist zunächst vorauszusehen, daß eine Quartik, wie eine Kubik aus zwei Zweigen, auch aus zwei oder mehreren voneinander getrennten reellen Zügen wird bestehen können. Die zwei Zweige, aus denen sich eine zweiteilige Kubik zusammensetzte, waren aber verschiedener Art. Einige leichte Überlegungen, die der Leser selbst machen kann, beweisen, daß der die Wendepunkte enthaltende Zweig von irgend einer Geraden nur in einem oder drei, das Oval nur in zwei oder keinem Punkte getroffen werden kann. So geht der erstere Zweig auch mindestens einmal durchs Unendliche, das Oval aber gar nicht oder zweimal. Beide Zweige stellen die Grundformen der schon von v. Staudt gegebenen zwei Fundamentaltypen aller Kurvenzüge[101]) dar: der Zug mit den Wendepunkten den »unpaaren« Zug und das Oval den »paaren« Zug. Die Definition eines unpaaren Kurvenzuges ist demnach die, daß er von jeder Geraden in einer ungeraden Anzahl von Punkten (also mindestens in einem), die des paaren, daß er von jeder Geraden in einer geraden Anzahl von Punkten (0 eingeschlossen) getroffen wird. Ein unpaarer Zug, durch Verzerrung aus einer Geraden entstanden, hat mindestens 3 Wendepunkte, immer aber eine

---

ständige Klassifikation der Quartiken zu geben, nämlich von Ruth Gentry: *„On the Forms of Plane Quartik Curves"*. Diss. Bryn Mawr (Pa.) 1896, 73 S. 8° und 24 S. Figuren, und von Warren G. Bullard: *„On the General Classification of Plane Quartic Curves"*. Diss. Worcester (Mass.) 1899. Abdruck aus Math. Review 1897, S. 193—208 mit 3 Tfln. — Die Verfasserin der ersteren Dissertation gibt 194 verschiedene Kurvenbilder, berücksichtigt aber außer den von uns schon angegebenen Einschränkungen auch die Lage der Wendepunkte nicht, was in Bullards Tafeln für die Quartiken mit einem und zwei Knoten ausgeführt ist. Die letztere Arbeit ist im übrigen eine bloße Aufzählung, während Ruth Gentry auch analytische Entwicklungen gibt.

[101]) *„Geometrie der Lage."* Nürnberg 1847, § 12. Bezüglich der independenten Einführung dieser Unterscheidung sehe man bei v. Staudt und Zeuthen.

ungerade Anzahl, der paare Zug, durch Verzerrung aus einem Kegelschnitt entstanden, hat, wenn überhaupt, dann immer eine gerade Anzahl von Wendepunkten, von denen jedes Paar einer Einbuchtung zugeordnet ist und zu einer Doppeltangente Veranlassung gibt. Es ist uns nicht unbekannt (s. z. B. S. 161), daß der Übergang von einem solchen einmal eingebuchteten Zug (Unifolium) zum reinen Oval durch die Form mit Flachpunkt stattfindet. Der paare Zug hat ferner noch die besondere Eigenschaft, die Ebene in zwei Gebiete zu teilen, die sich als Inneres und Äußeres, mag der Zweig auch noch so oft durchs Unendliche gehen, dadurch charakterisieren lassen, daß im äußeren Gebiet unpaare Zweige möglich sind[102]), die den paaren Zweig nicht treffen, während jeder unpaare Zweig, der einen Punkt im inneren Gebiet besitzt, den paaren Zug mindestens in zwei Punkten schneidet. Wir können dann überhaupt allgemeiner sagen, daß ein paarer Zug von jedem anderen (paaren oder unpaaren) in einer geraden Anzahl von Punkten, ein unpaarer Zug von jedem anderen in einer ungeraden Anzahl von Punkten getroffen wird.

132. Wenn wir nun eine Quartik aus solchen einzelnen Zügen zusammengesetzt denken, so ist klar, daß dieselbe nicht zwei unpaare Zweige enthalten kann, ohne gleichzeitig einen Doppelpunkt zu besitzen. Demnach kann eine Quartik ohne Singularität überhaupt keinen unpaaren Zug besitzen, da ein einzelner unpaarer Zweig von einer beliebigen Geraden entweder in einem oder in drei Punkten geschnitten würde, die Kurve also mindestens noch einen solchen haben müßte, um 4. Ordg. zu sein. Aus ähnlichen Gründen kann eine Quartik nicht drei unpaare Zweige besitzen und wenn sie aus vier solchen besteht, so müssen diese gerade Linien sein; die Quartik ist dann zerfallen.

---

[102]) Es ist jedoch keineswegs nötig, daß es auch immer Gerade gebe, die den paaren Zweig gar nicht treffen. Wir haben solche paare Kurvenzüge, die sich nicht ins Endliche projizieren lassen, schon kennen gelernt (s. z. B. Fig. 33 u. 34). Bei Quartiken ist dazu allerdings erforderlich, daß dieser Zweig wenigstens zwei Doppelpunkte habe. Schon CAYLEY hat aber gezeigt, daß nicht jede allgemeine Kurve sechster Ordnung ins Endliche projiziert werden kann. S. die Abhandlung *„On quartic curves“* in Phil. Mag. **29**, 1865, S. 105—108. Coll. Pap. Bd. V, S. 468—470.

Wollen wir nun eine nichtsinguläre Quartik aus paaren Zweigen zusammensetzen, so müssen wir unterscheiden, ob die paaren Zweige ganz auseinander (jeder im äußeren Gebiet jedes anderen) oder vielleicht zum Teil ineinander liegen sollen. Wenn sie sämtlich auseinander liegen, so ist die Maximalzahl der möglichen Zweige vier, denn wenn wir auf jedem derselben einen Punkt annehmen und durch diese vier Punkte einen beliebigen Kegelschnitt legen, so schneidet dieser die Quartik in acht Punkten, während sich auf dieselbe Weise zehn Schnittpunkte ergäben, wenn wir fünf paare Zweige annähmen. — Liegt aber ein paarer Zweig innerhalb eines anderen, so kann erstens der innere Zweig keinen Wendepunkt haben, da die zugehörige Wendetangente die Quartik in sechs Punkten schnitte, zweitens kann sonst kein weiterer Zweig vorhanden sein, weil sich Gerade angeben ließen, die ebenfalls mindestens sechs Schnittpunkte mit der Kurve gemein hätten. Der so definierte Typus wird »Ringkurve« oder »Gürtelkurve« genannt.

Auf Kurven mit Singularitäten werden wir weiter unten zurückkommen; wir möchten nur im Anschluß an das Vorhergehende noch bemerken, daß eine Quartik mit einem durch zwei unpaare Zweige gebildeten Doppelpunkt außerdem nur noch ein reines Oval (ohne Einbuchtung) haben kann. Die Gründe hierfür findet der Leser nach Obigem selbst.

§ 71. **Zwei Beispiele von Quartiken.**

133. Um diese allgemeinen Betrachtungen zu stützen, geben wir zunächst zwei Beispiele. Das erste ist von Plücker[103]) und diente diesem dazu, nachzuweisen, daß sämtliche 28 Doppeltangenten einer Quartik reell sein können. In diesem Falle muß die Quartik natürlich vierteilig sein. Die vier Züge haben dann (wie Kegelschnitte) untereinander $\binom{4}{2}\cdot 4 = \frac{4\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2} = 24$ gemeinschaftliche Tangenten, die für die Quartik Doppeltangenten sind. Dann müßten nur noch vier Einbuchtungen vorhanden sein, die zu vier weiteren Doppeltangenten Anlaß gäben. Plücker geht nun aus von einer Kurve

$$(1)\quad \Omega \equiv (y^2 - x^2)(x-1)\left(x-\tfrac{3}{2}\right) - 2\{y^2 + x(x-2)\}^2 = 0\,.$$

[103]) *„Algebraische Kurven“*, S. 247.

Der Kreis der geschweiften Klammer ist dem Dreieck der Geraden $(y^2 - x^2)(x - 1) = 0$ umbeschrieben. In diesen drei Ecken hat die Kurve also Doppelpunkte (bez. des allgemeinen Nachweises vgl. Nr. 22), $x - \frac{3}{2} = 0$ ist eine Doppeltangente. Dies ist der Typus **II** der rationalen Quartik, bez. dessen Darstellung wir seinerzeit (S. 148) hierher verwiesen haben.

Betrachten wir nun die Kurven $\Omega = k$ für ganz kleine positive oder negative k, so wird die eine dieser Kurven (etwa für $k > 0$), sich der Kurve $\Omega = 0$ von außen ganz

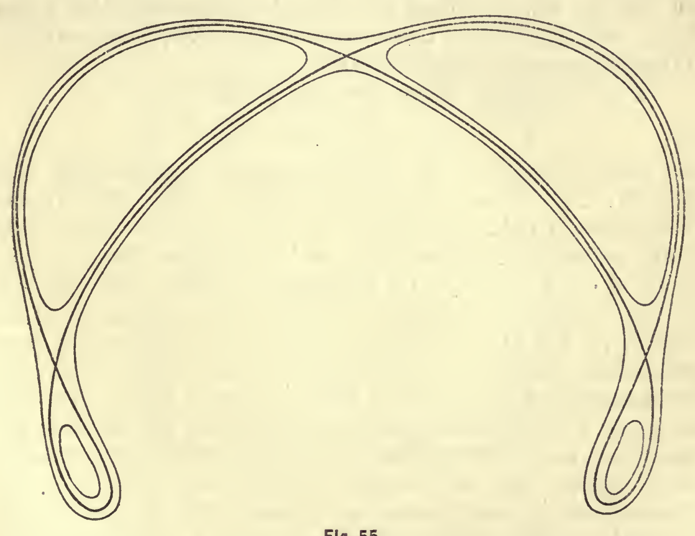


Fig. 55.

eng anschmiegen, ohne sie irgendwo zu überschreiten. Dieselbe besteht demnach aus einem einzelnen Zweig mit vier Einbuchtungen (»Quadrifolium«) und vier reellen Doppeltangenten. — Nehmen wir aber $k < 0$, so erhalten wir eine Quartik, die aus vier einzelnen Teilen besteht, von denen jeder, solange nur k klein genug ist, eine Einbuchtung hat. Diese Kurve hat demnach in der Tat 28 reelle Doppeltangenten. Die Kurven sind in Figur 55, gegen das angenommene Koordinatensystem um 90^0 gedreht, dargestellt. Dasselbe Ergebnis hätten wir übrigens mit jeder andern

rationalen Quartik des vorliegenden Typus erhalten, auch wenn die zwei reellen Wendepunkte nicht gerade in den äußersten Schleifen lägen, wie dies beim PLÜCKERschen Beispiel offenbar der Fall ist. Es würden dann nur Bifolien (mit zwei Einbuchtungen) und reine Ovale auftreten, aber die Zahl der Zweige uud reellen Doppeltangenten bliebe dieselbe. — Wir benützen die Gelegenheit, um gleich auf einen fundamentalen Unterschied zwischen den Doppeltangenten, der weiterhin eine große Rolle spielen wird, hinzuweisen. Es gibt in dem vorliegenden Beispiel vier Doppeltangenten, die nur an einem Zweig berühren (»Doppeltangenten erster Art«) und 24, die an zwei verschiedenen Zweigen berühren (»Doppeltangenten zweiter Art«).

Die Gleichung (1) ist von der Form

$$\mathsf{T}_1 \mathsf{T}_2 \mathsf{T}_3 \mathsf{T}_4 + \lambda \mathsf{K}^2 = 0\,; \tag{2}$$

nur hatte die Kurve $\Omega = 0$ die spezielle Eigenschaft, daß sich T_1, T_2, T_3 auf K schnitten, was zu den drei Knoten Veranlassung gab. Sind aber die T_i beliebige Gerade und K ein beliebiger Kegelschnitt, so ist (2) eine Form, in die, da sie $4 \cdot 2 + 1 + 5 = 14$ Konstante enthält, jede Quartik auf eine endliche Anzahl von Arten muß gebracht werden können (s. Nr. 145). Aus der Form der Gleichung ist dann ersichtlich, daß die T_i vier Doppeltangenten sind, deren acht Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt K liegen. Da sich die ganze weitere Diskussion der gestaltlichen Verhältnisse der Quartiken an die Möglichkeit dieser Darstellung anschließen wird, geben wir als zweites Beispiel ein Kurvensystem (Büschel mit je zwei zusammenfallenden Grundpunkten), das durch eine solche Gleichung bei variablem λ dargestellt wird.

134. Wir wollen uns die Gleichung vorlegen:

$$\begin{aligned} \mathsf{Q} \equiv (x+y+1)(x+y-1)(x-y+1)(x-y-1) \\ + \lambda(4x^2+4y^2-3)^2 = 0\,, \end{aligned} \tag{3}$$

die geordnet lautet

$$\left\{ \begin{aligned} &(x^4+y^4)(16\lambda+1) + 2x^2y^2(16\lambda-1) \\ &-2(x^2+y^2)(12\lambda+1) + (9\lambda+1) = 0\,. \end{aligned} \right. \tag{3*}$$

Die vier Doppeltangenten bilden hier ein Quadrat, K ist ein Kreis, der die vier Quadratseiten in den reellen Berührungspunkten der Doppeltangenten schneidet. Die Kurve

besteht für jedes λ aus acht kongruenten Oktanten, was ihre Diskussion erleichtert. Man sehe für das Folgende die Figur 56.

Beginnen wir mit $\lambda = 0$, so besteht Q aus den vier Doppeltangenten selbst und hat sechs Doppelpunkte, von denen zwei im Unendlichen liegen. Sobald wir λ einen von 0 verschiedenen Wert erteilen, lösen sich diese sechs

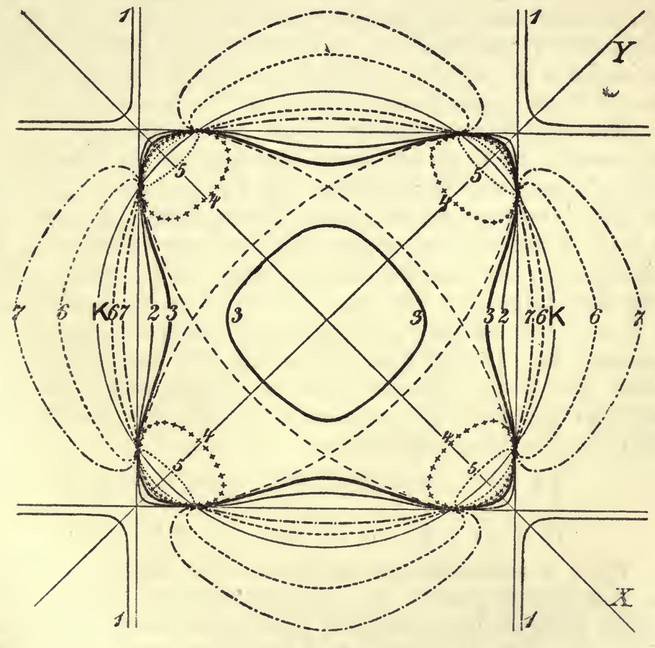


Fig. 56.

Knoten und zwar in dem einen oder andern Sinne, je nachdem $\lambda \gtrless 0$ gesetzt wird. Alle Quartiken des Büschels werden daher entweder in den drei Vierecken oder den vier Dreiecken liegen, die von den vier Doppeltangenten gebildet werden. Auch für Quartiken haben wir also eine fundamentale Unterscheidung in Dreiecks- und Vierecks-kurven. Setzen wir nun λ, um die Reihe der Kurven zu beginnen, sehr klein negativ, etwa $= -0{,}01$, so resultiert

eine Kurve, die im Innern des Quadrats ein Quadrifolium hat, das sich noch enger an das Quadrat anschließt als *2* und daher nicht mehr gezeichnet wurde, in jedem der beiden durchs Unendliche gehenden Vierecke aber je ein hyperbolisches Oval (*1*). Die Asymptotenrichtung dieser Ovale, die bei den von uns gezeichneten kleinen Stücken noch nicht zum Ausdruck kommen kann, ist gegeben durch $y = 1{,}527\,x$ ca. Lassen wir nun λ negativ größer werden, so buchtet sich das Quadrifolium tiefer ein, die Ovale runden sich und treten mehr zurück, während sie natürlich hyperbolisch bleiben, bis sie für $\lambda = -\frac{1}{16}\,(= -0{,}0625)$ auf zwei unendlich ferne isolierte Punkte zusammenschrumpfen. Zu dieser Kurve gehört das gezeichnete Quadrifolium *2*. Sobald $\lambda < -\frac{1}{16}$ wird, verschwinden die isolierten Punkte völlig, die Quartik besteht nur aus einem Quadrifolium; für $\lambda = -\frac{1}{9}\,(= -0{,}111$ ca.) aber tritt im Anfangspunkt ein isolierter Punkt auf, der sich für noch kleinere λ zu einem Oval erweitert, während die Einbuchtung des Quadrifoliums immer tiefer wird. Wir haben die Ringkurve vor uns, von welcher ein Individuum für $\lambda = -0{,}12$ (Kurve *3*) dargestellt wurde. Das innere Oval und das Quadrifolium haben mit fortschreitendem Abnehmen von λ die Tendenz, sich zu nähern, und in der Tat erhält die Quartik für $\lambda = -\frac{1}{8}\,(= -0{,}125)$ vier Knoten und zerfällt in das Kegelschnittpaar

$$\left\{2x^2(2-\sqrt{2})+2y^2(2+\sqrt{2})-1\right\}$$
$$\cdot\left\{2x^2(2+\sqrt{2})+2y^2(2-\sqrt{2})-1\right\}=0\,.$$

Wird λ noch kleiner, so lösen sich die vier Knoten des Kegelschnittpaares im entgegengesetzten Sinne; die Quartik besteht dann aus vier getrennten Unifolien, die zunächst eine, wenn auch flache Einbuchtung haben. Die Doppeltangenten, die vorher erster Art waren, sind nun zweiter Art und es treten neue Doppeltangenten erster Art, den Einbuchtungen zugeordnet, auf. Setzt man in (3*) $y = a$ und stellt die Bedingung, daß die Gleichung für diesen Wert von y vier in $x = 0$ zusammenfallende Werte habe, so erhält man für den Übergang der Einbuchtung zum Flachpunkt $a = \sqrt{\dfrac{12\lambda+1}{16\lambda-1}}$ und dann für λ die Gleichung

$$16\lambda^2 + 33\lambda + 16 = 0$$

mit den Wurzeln $\lambda_1 = -0{,}1294$ ca. und $\lambda_2 = -1{,}933$ ca. Es gibt demnach zwei solche Übergänge, von denen uns zunächst der für $\lambda = \lambda_1$ interessiert. Ist dann $\lambda_2 < \lambda < \lambda_1$, so besteht die Quartik aus vier reinen Ovalen, für welche Gattung die zwei Fälle $\lambda = -\frac{1}{5} (= -0{,}2)$ und $\lambda = -1$ (Kurven *4* u. *5*) gezeichnet sind. Für $\lambda < \lambda_2$ erhalten die vier getrennten Teile wieder Einbuchtungen. Die Doppeltangenten erster Art, die beim Übergang durch den Flachpunkt sich abtrennten und isoliert wurden, treten wieder an die Kurve. Die Unifolien werden, je mehr λ abnimmt, immer schmäler und schmiegen sich schließlich den innerhalb des Quadrats liegenden Stücken des Kreises K immer mehr an. In der Tat resultiert für unendlich großes λ dieser Kreis doppeltzählend selbst; aus unserer Betrachtung erkennen wir aber, daß für $\lambda = -\infty$ nur die innerhalb des Quadrats gelegenen Bogen in Betracht kommen. Hätten wir λ durchs Positive ∞ werden lassen, so wären offenbar die außerhalb des Quadrats liegenden Kreisbogen doppelt überdeckt worden. In der Tat erhalten wir für alle positiven Werte von λ eine Kurve, die aus vier in den vier Dreiecken der Figur liegenden Unifolien besteht; für $\lambda = 1$ (Kurve *6*) und $\lambda = \frac{1}{4}$ (Kurve *7*) sind Kurventypen gezeichnet, deren Einbuchtungen für abnehmendes λ immer flacher werden, während die nach außen konvexen Teile sich immer weiter hinaus erstrecken, um schließlich für $\lambda = 0$, wenn der Kreislauf beendet ist, wieder mit den vier Doppeltangenten zusammenzufallen.

§ 72. Die Kleinsche Relation.

135. Wenn wir die Erfahrungen, die wir bei Betrachtung dieses Beispiels gemacht haben, verallgemeinern, werden wir gleich zu einem der wichtigsten Sätze über die Doppeltangenten der allgemeinen Quartik gelangen. Wir sahen, daß eine Doppeltangente erster Art immer in Verbindung mit zwei Wendepunkten auftritt. Rücken die beiden Wendepunkte zusammen, so wird die Doppeltangente Flachpunktstangente und sie wird isoliert, wenn die Wendepunkte und damit ihre Berührungspunkte imaginär werden. Wenn man demnach bei einer Quartik die Zahl der reellen Wendepunkte ϱ' und die doppelte Anzahl der isolierten Doppeltangenten $2\,\delta''$

addiert, so muß diese Summe bei dem angedeuteten Übergang konstant bleiben. Wir werden gleich zeigen, daß diese Summe $(\varrho' + 2\,\delta'')$ überhaupt für jede nichtsinguläre Quartik eine Konstante ist. Denn denken wir uns zwei beliebige Quartiken in der Ebene, so können wir die eine in die andere durch ganz kleine Konstantenänderungen in der Gleichung überführen. Dabei kann man immer vermeiden, daß Kurven überschritten werden, deren Koeffizienten gleichzeitig zwei vorgeschriebenen algebraischen Bedingungen genügen; Kurven mit einer Bedingung werden aber im allgemeinen eine endliche Anzahl mal auftreten. Wir müssen demnach Übergangsformen mit einem Doppelpunkte in Betracht ziehen, können aber Fälle mit einer Spitze, zwei Doppelpunkten usw. ausschließen. Aus demselben Grund kann auch der Fall außer Betracht bleiben, daß zwei isolierte Doppeltangenten koinzidieren, da dies, wie man leicht erkennt, zwei Bedingungen entspräche und überdies bei Quartiken gar nicht vorkommen kann.

Wenn wir nun aber den Durchgang durch einen Doppelpunkt näher ins Auge fassen, so müssen wir unterscheiden zwischen isolierten Punkten und Knoten. Das Auftreten oder Verschwinden eines isolierten Punktes affiziert offenbar weder die Zahl ϱ', noch die Zahl δ'', denn der isolierte Doppelpunkt ist immer die (obere oder untere) Grenze eines Ovals, das seine Wendepunkte, wenn es solche hatte, schon muß verloren haben. In der Tat sahen wir bei den Kubiken direkt, daß der isolierte Punkt 6 imaginäre Wendepunkte absorbiert, die Zahl der reellen aber ungeändert läßt. Ein Knoten aber absorbiert immer 2 reelle und 4 imaginäre Wendepunkte. Dieselben treten jedoch aus dem gleichen Grunde wieder auf, wenn wir den Knoten im anderen Sinne lösen. Dies wissen wir ebenfalls von den Kubiken, können es aber ganz allgemein leicht durch Betrachtung der Konkavität und Konvexität der den Knoten bildenden Kurvenbögen nachweisen. Wir müssen nur ausschließen, daß einer dieser Bögen im Knoten selbst eine Inflexion habe, was durch eine kleine Deformation immer erreicht werden kann. Die Zahl ϱ' bleibt also beim Durchgang durch einen Knoten ungeändert. Daß aber δ'' nicht geändert wird, ist offensichtlich; denn eine Änderung von δ'' kann bei Quartiken überhaupt nur beim Übergang durch einen Flachpunkt eintreten.

Da wir nun an unseren Beispielen sahen, daß

$$\varrho' + 2\,\delta'' = 8\,,$$

so gilt dies für jede Quartik[104]).

Bezeichnen wir die Anzahl der Doppeltangenten erster Art mit reellen Berührungspunkten durch δ', so ist offenbar $\varrho' = 2\,\delta'$ und es ergibt sich

$$\delta' + \delta'' = 4\,,$$

d. h. jede Quartik hat vier Doppeltangenten erster Art.

Zwei auseinanderliegende Zweige einer Kurve haben nun vier gemeinsame Tangenten und da eine Quartik

4 3 2 1 0

solche Zweige hat, hat sie

24 12 4 0 0

Doppeltangenten zweiter Art, also im ganzen

28 16 8 4 4

reelle Doppeltangenten überhaupt.

Die Ringkurve, die hierbei nicht mit inbegriffen ist, hat natürlich nur die vier Doppeltangenten erster Art.

---

[104]) Durch eine Erweiterung der obigen Betrachtungen hat F. KLEIN (Math. Ann. **10**, 1876, S. 199—209) bewiesen, daß für jede allgemeine n-ik gilt

$$\varrho' + 2\,\delta'' = n\,(n-2)\,,$$

und wenn r' reelle Spitzen und d'' isolierte Doppelpunkte vorhanden sind:

$$n + \varrho' + 2\,\delta'' = \nu + r' + 2\,d''\,,$$

welche Formel zu sich selbst dualistisch ist. Es sind dies bis jetzt die einzigen Ansätze, die für Beziehungen zwischen den reellen Singularitäten einer algebraischen Kurve gemacht wurden, Beziehungen, die besonders für die Diskussion der gestaltlichen Verhältnisse von großer Wichtigkeit wären (vgl. Nr. 25, Beisp. 3). Siehe auch die Darstellung KLEINs in den auf S. 2 zitierten *Vorlesungen.*

[105]) *„Géométrie de position.“* Paris 1803, S. 291. — Wir bemerken ausdrücklich, da dieser Satz bei SALMON-FIEDLER unter „Metrische Eigenschaften“ aufgeführt wird, daß derselbe projektiver Natur ist. Er ist allerdings bei S.-F. mit metrischen Hilfsmitteln abgeleitet.

§ 73. Der Carnotsche Satz.

136. Für alles weitere, besonders auch für die Darstellbarkeit jeder Quartik in der Form (2) ist aber die Kenntnis eines von CARNOT[105]) aufgestellten Satzes, der sich auf den Schnitt von beliebigen Polygonen mit Kurven irgendwelcher Ordnung bezieht, unerläßlich. Wir müssen daher in unseren Betrachtungen über Quartiken etwas inne halten, um diesen Satz abzuleiten.

Sei die Gleichung irgend einer n-ik

$$f \equiv a_1 x_1^n + \ldots + a_2 x_2^n + \ldots + a_3 x_3^n = 0\,,$$

so ist für die Schnittpunkte dieser Kurve mit einer Koordinatenseite (z. B. $x_3 = 0$) nach einem bekannten Satze der Algebra das Produkt aller Koordinatenverhältnisse x_1/x_2

$$\prod\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = (-1)^n \cdot \frac{a_2}{a_1}\,.$$

Da aber in gleicher Weise für die Schnittpunkte derselben Kurve mit der Koordinatenseite $x_1 = 0$

$$\prod\left(\frac{x_2}{x_3}\right) = (-1)^n \cdot \frac{a_3}{a_2}$$

und ebenso

$$\prod\left(\frac{x_3}{x_1}\right) = (-1)^n \cdot \frac{a_1}{a_3}\,,$$

so ergibt sich durch Multiplikation, da überdies $(-1)^{3n} = (-1)^n$, die Relation

$$\prod\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \cdot \prod\left(\frac{x_2}{x_3}\right) \cdot \prod\left(\frac{x_3}{x_1}\right) = (-1)^n\,, \tag{4}$$

die von der Definition der Koordinaten ganz unabhängig ist. Sind nun $P_1', P_1'', \ldots P_1^{(i)}, \ldots P_1^{(n)}$ die Schnittpunkte von f mit $x_1 = 0$ $(A_2 A_3)$, $P_2^{(i)}$ die Schnittpunkte mit $x_2 = 0$ $(A_1 A_3)$ und $P_3^{(i)}$ die mit $x_3 = 0$ $(A_2 A_1)$, so läßt sich zeigen, daß die Relation (4) ersetzt werden kann durch die ihr identische

$$\prod_1^n{}_i \frac{A_2 P_3^{(i)}}{A_1 P_3^{(i)}} \cdot \prod_1^n{}_i \frac{A_3 P_1^{(i)}}{A_2 P_1^{(i)}} \cdot \prod_1^n{}_i \frac{A_1 P_2^{(i)}}{A_3 P_2^{(i)}} = +1\,, \tag{4*}$$

die man als CARNOTschen Satz bezeichnet. Derselbe gilt offenbar für jedes Dreieck $A_1 A_2 A_3$, da dasselbe immer als Koordinatendreieck aufgefaßt werden kann.

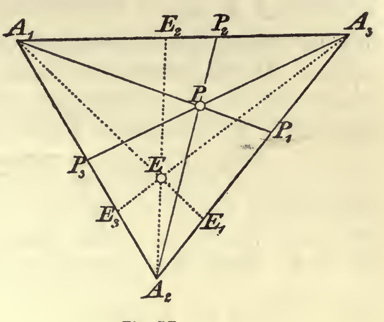


Fig. 57.

Um die Identität von (4) und (4*) zu erweisen, denken wir uns in (4) die Koordinaten ganz allgemein durch Doppelverhältnisse definiert, da jede andere Definition hiervon nur ein Spezialfall ist. Wir haben dann, wenn E der Einheitspunkt ist, nach Fig. 57 für einen beliebigen Punkt P

$$(5)\begin{cases} \dfrac{x_1}{x_2} = A_3(A_1, A_2, E_3, P_3) = \dfrac{A_1 E_3}{A_2 E_3} : \dfrac{A_1 P_3}{A_2 P_3} = \dfrac{A_2 P_3}{A_1 P_3} \cdot \dfrac{A_1 E_3}{A_2 E_3}, \\ \dfrac{x_2}{x_3} = A_1(A_2, A_3, E_1, P_1) = \dfrac{A_2 E_1}{A_3 E_1} : \dfrac{A_2 P_1}{A_3 P_1} = \dfrac{A_3 P_1}{A_2 P_1} \cdot \dfrac{A_2 E_1}{A_3 E_1}, \\ \dfrac{x_3}{x_1} = A_2(A_3, A_1, E_2, P_2) = \dfrac{A_3 E_2}{A_1 E_2} : \dfrac{A_3 P_2}{A_1 P_2} = \dfrac{A_1 P_2}{A_3 P_2} \cdot \dfrac{A_3 E_2}{A_1 E_2}. \end{cases}$$

Dann ist aber z. B.

$$\Pi\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \left(\frac{A_1 E_3}{A_2 E_3}\right)^n \cdot \prod_1^n{}_i \frac{A_2 P_3^{(i)}}{A_1 P_3^{(i)}}$$

und entsprechend die übrigen.

Durch die Substitution (5) erscheint also auf der linken Seite von (4) außer der linken Seite von (4*) noch der Faktor

$$\left(\frac{A_1 E_3}{A_2 E_3} \cdot \frac{A_2 E_1}{A_3 E_1} \cdot \frac{A_3 E_2}{A_1 E_2}\right)^n.$$

Die Basis dieser n^{ten} Potenz ist aber nach dem Lehrsatz des CEVA gleich -1. Hiermit ist die Richtung von (4*) erwiesen.

137. Die Ausdehnung des CARNOTschen Satzes auf beliebige Polygone ist einleuchtend. Stoße etwa an die Seite

$A_1 A_3$ des $\triangle A_1 A_2 A_3$ ein weiteres $\triangle A_1 A_3 A_4$, so wird das Produkt $\prod \frac{A_3 P_2}{A_1 P_2}$, multipliziert mit zwei weiteren auf die beiden neuen Seiten bezüglichen Produkten, wiederum 1 ergeben. Multiplizieren wir dann (4*) mit der neuen Carnotschen Gleichung, so erhalten wir, da sich das auf die Diagonale $A_1 A_3$ bezügliche Produkt heraushebt

$$\Pi_{(A_1 A_2)} \cdot \Pi_{(A_2 A_3)} \cdot \Pi_{(A_3 A_4)} \cdot \Pi_{(A_4 A_1)} = +1\,,$$

unabhängig von der Ordnung n der Kurve f und der Seitenzahl des Polygons. Man kann auch direkt einsehen, daß die linke Seite des Carnotschen Satzes immer positiv sein muß. Denn ein Quotient von der Form $\frac{A_2 P_3^{(i)}}{A_1 P_3^{(i)}}$ z. B. wird nur dann negativ, wenn $P_3^{(i)}$ zwischen A_1 und A_2 liegt. Nun kann man aber jedes Polygon als paaren Zug betrachten (s. Nr. 131), um zu erkennen, daß der Umfang des Polygons von jeder Kurve nur in einer geraden Anzahl von Punkten geschnitten werden kann, so daß negative Faktoren nur in gerader Anzahl auftreten.[105a])

Beisp. Ist f ein Kegelschnitt, so hat man nach dem Carnotschen Satz und in der oben angewendeten Bezeichnungsweise

$$\frac{A_3 P_1' \cdot A_3 P_1''}{A_2 P_2' \cdot A_2 P_1''} \cdot \frac{A_1 P_2' \cdot A_1 P_2''}{A_3 P_2' \cdot A_3 P_2''} \cdot \frac{A_2 P_3' \cdot A_2 P_3''}{A_1 P_3' \cdot A_1 P_3''} = +1\,.$$

Fallen nun aber die Punkte P_1', P_1''; P_2', P_2''; P_3', P_3'' je in die Punkte Q_1, Q_2, Q_3 zusammen, so ergibt sich

$$\frac{A_3 Q_1}{A_2 Q_1} \cdot \frac{A_1 Q_2}{A_3 Q_2} \cdot \frac{A_2 Q_3}{A_1 Q_3} = \pm 1\,.$$

Hier gilt nun für einen eigentlichen Kegelschnitt offenbar nur das Zeichen „—“. Das gibt nach dem Lehrsatz des Ceva die schon in Nr. 75, Beisp. erwähnte Tatsache, daß die drei Strahlen von den Ecken des Dreiecks nach den Berührungspunkten eines eingeschriebenen Kegelschnittes durch einen Punkt laufen. Gilt aber das „+“-Zeichen, so müssen von den drei Punkten Q_1, Q_2, Q_3

[105a]) Die Vorzeichenbestimmung bei Salmon-Fiedler ist daher nicht bloß unnötig, sondern sogar unrichtig und führt in der Tat beim Lehrsatz des Menelaos (und Ceva) zu falschen Vorzeichen. Der Sachverhalt ist dort verdeckt, da die Streckenprodukte nicht auf eine Seite der Gleichung gebracht sind.

entweder zwei auf den Seiten des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ und der dritte auf einer Verlängerung, oder alle drei auf den Verlängerungen liegen. Der Kegelschnitt ist dann in eine doppeltzählende Gerade degeneriert und wir haben den Satz des Menelaos, der hier nur als Spezialfall des Satzes von Carnot erscheint.

§ 74. Allgemeine Gleichungsformen für Quartiken.

138. Indem wir nun wieder zu den Quartiken zurückkehren, betrachten wir ein von drei Doppeltangenten ge-

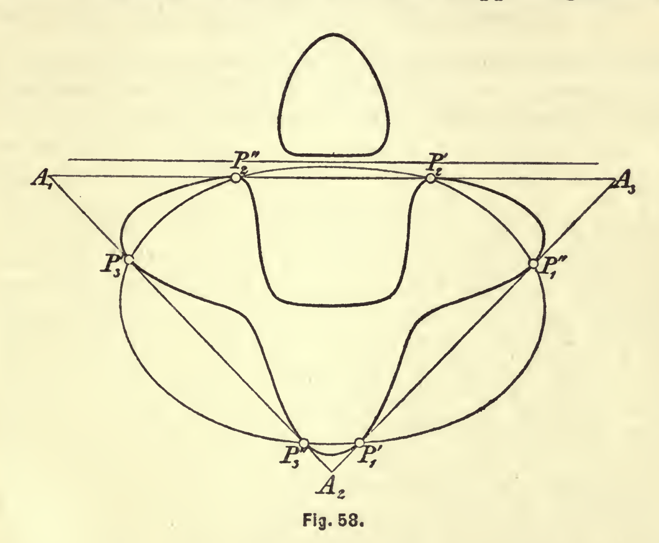


Fig. 58.

bildetes Dreieck $A_1 A_2 A_3$ (vgl. Fig. 58). Sind die Berührungspunkte der Doppeltangenten bezüglich $P_1', P_1''; P_2', P_2''; P_3', P_3''$, so ist nach dem Carnotschen Satz

$$\frac{\overline{A_3 P_1'}^2 \cdot \overline{A_3 P_1''}^2}{\overline{A_2 P_1'}^2 \cdot \overline{A_2 P_1''}^2} \cdot \frac{\overline{A_1 P_2'}^2 \cdot \overline{A_1 P_2''}^2}{\overline{A_3 P_2'}^2 \cdot \overline{A_3 P_2''}^2} \cdot \frac{\overline{A_2 P_3'}^2 \cdot \overline{A_2 P_3''}^2}{\overline{A_1 P_3'}^2 \cdot \overline{A_1 P_3''}^2} = +1$$

und daher

$$\frac{A_3 P_1' \cdot A_3 P_1''}{A_2 P_1' \cdot A_2 P_1''} \cdot \frac{A_1 P_2' \cdot A_1 P_2''}{A_3 P_2' \cdot A_3 P_2''} \cdot \frac{A_2 P_3' \cdot A_2 P_3''}{A_1 P_3' \cdot A_1 P_3''} = \pm 1 .$$

Demnach gibt es (s. d. Beisp. der vor. Nr.) sowohl Tripel von Doppeltangenten, deren 6 Berührungspunkte auf einem Kegel-

schnitt liegen, als auch solche, für die dies nicht stattfindet. Legt man in dem letzteren Falle dann etwa einen Kegelschnitt durch die 5 Punkte P_1', P_1'', P_2', P_2'' und P_3', so geht dieser Kegelschnitt durch den zu P_3'' in bezug auf A_1, A_2 harmonisch zugeordneten Punkt $\boldsymbol{P}_3''$. Denn es ist

$$\frac{A_2 \boldsymbol{P}_3''}{A_1 \boldsymbol{P}_3''} = - \frac{A_2 P_3''}{A_1 P_3''}$$

und demnach wird für $\boldsymbol{P}_3''$ die rechte Seite gleich $+1$.

Ein Ausdruck wie $\frac{A_3 P_1' \cdot A_3 P_1''}{A_2 P_1' \cdot A_2 P_1''}$ ist aber immer dann positiv, wenn die Punkte P_1', P_2'' durch die Ecken A_2, A_3 nicht getrennt werden, so daß also die beiden Berührungspunkte entweder beide auf der endlichen Strecke $A_2 A_3$ oder auf der unendlichen Strecke $A_3 A_2$ liegen. Für Doppeltangenten erster Art ist nun dies immer der Fall. Denn sind P_1', P_1'' die Berührungspunkte einer Doppeltangente erster Art, so liegt der Kurventeil mit den 2 Wendepunkten der endlichen (oder unendlichen) Strecke $P_1' P_1''$ gegenüber und diese Strecke kann dann von keiner anderen Doppeltangente getroffen werden, da diese sonst 6 Schnittpunkte mit der Kurve gemein hätte. Demnach können die Ecken A_2, A_3 die Punkte P_1', P_1'' nicht trennen. Sind nun auch $A_1 A_2$ und $A_3 A_1$ Doppeltangenten erster Art, so gilt für deren Berührungspunkte das nämliche und das fragliche Produkt wird immer gleich $+1$, so daß die Bedingungen des Carnotschen Satzes erfüllt sind und die sechs Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt liegen. Dies läßt sich aber sofort auf alle vier Doppeltangenten erster Art ausdehnen, da viermal je drei der vier Paare von Berührungspunkten auf einem Kegelschnitt liegen müßten. Dies kann nur der Fall sein, wenn diese Kegelschnitte identisch sind. Sei nämlich K der eine derselben, der durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten T_1, T_2, T_3 geht, K_1, K_2, K_3 die drei anderen, die resp. durch die Berührungspunkte von T_1, T_2, T_3 nicht, aber sämtlich durch die von T_4 gehen, so lassen sich die Kegelschnitte K_1, K_2, K_3 in der Form darstellen

$$\begin{aligned} \mathsf{K}_1 &\equiv \mathsf{K} - \lambda_1 \mathsf{T}_2 \mathsf{T}_3 = 0 \\ \mathsf{K}_2 &\equiv \mathsf{K} - \lambda_2 \mathsf{T}_3 \mathsf{T}_1 = 0 \\ \mathsf{K}_3 &\equiv \mathsf{K} - \lambda_3 \mathsf{T}_1 \mathsf{T}_2 = 0 \,. \end{aligned}$$

Für die Punkte des vierten Paares ist demnach zugleich

$$\frac{T_1 K}{\lambda_1} = \frac{T_2 K}{\lambda_2} = \frac{T_3 K}{\lambda_3} = 0 .$$

Diese Gleichungen können nur erfüllt werden, wenn entweder alle λ_i verschwinden oder $K = 0$ ist. In jedem Falle ergibt sich, daß $K_1 \equiv K_2 \equiv K_3 \equiv K$. Darnach haben wir den wichtigen Satz:

Die acht Berührungspunkte der vier Doppeltangenten erster Art liegen auf einem Kegelschnitt.

(In Fig. 58 sind allerdings die Berührungspunkte der vierten Doppeltangente konjugiert imaginär.)

Wir haben demnach hier eine Darstellung in der schon angegebenen Form

$$T_1 T_2 T_3 T_4 + \lambda K^2 = 0 . \tag{2}$$

Um sämtliche nicht singuläre Formen der Quartiken zu klassifizieren, brauchen wir also nur das Vierseit der vier Doppeltangenten erster Art zu geben — alle Vierseite sind projektiv — und die Lage von K in bezug auf dasselbe zu diskutieren. Dabei ist zu beachten, daß die Eigenschaft der Quartiken der Nr. 134, entweder in den drei Vierecken oder den vier Dreiecken der durch die T_i geteilten Ebene zu liegen, eine ganz allgemeine ist und sogar dann gilt, wenn die T_i beliebige Doppeltangenten sind. Denn das Produkt $T_1 T_2 T_3 T_4$ ändert sein Zeichen, sobald man eine dieser Tangenten überschreitet. Ist nun λ etwa >0, so kann die Kurve nur in den Gebieten liegen, für welche das Produkt der T_i negativ ist. Ist das etwa in einem der Dreiecke der Fall, so ist das fragliche Produkt in den drei anstoßenden Vierecken negativ und in allen übrigen Dreiecken wieder positiv. Für $\lambda < 0$ ist es gerade umgekehrt.

Beisp. Für die Lamésche Kurve $x^4 + y^4 = a^4$, die wir schon in Nr. 14 als Beispiel benutzten, sind die Punkte, die sie mit den Achsen gemeinsam hat, Flachpunkte. Die Geraden $x = \pm a$, $y = \pm a$ sind also Doppeltangenten erster Art. Die Kurvengleichung muß demnach in die Form

$$f \equiv (x^2 - a^2)(y^2 - a^2) + \lambda (x^2 + y^2 - a^2)^2 = 0$$

gebracht werden können. In der Tat findet man durch Vergleichung der Koeffizienten $\lambda = -\frac{1}{2}$. Für diesen Wert von λ ist

f also ein reines Quadrifolium, resp. die Übergangsform von einem solchen zu einem Oval. Für $\lambda = -1$ erhält f im Anfangspunkt einen isolierten Punkt usw.

2. Die möglichen Formen der Quartiken.

§ 75. Kurven ohne Singularitäten.

139. Von den möglichen Lagen von K in bezug auf die vier Doppeltangenten erster Art wollen wir nur die-

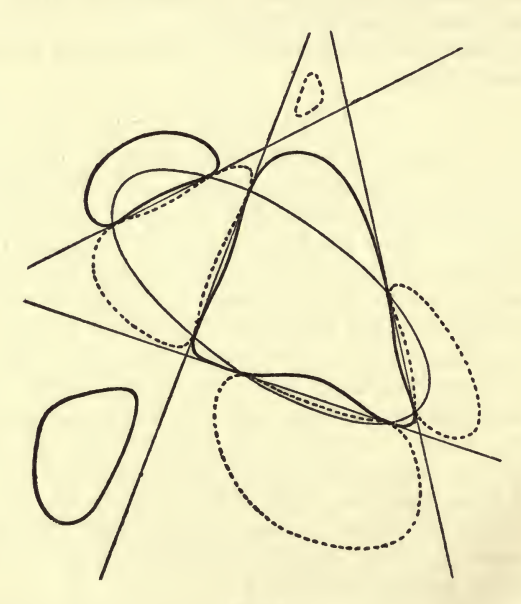


Fig. 59.

jenigen aufzählen und mit Kurvenbeispielen belegen, bei welchen alle acht Schnittpunkte, also acht Wendepunkte der Quartik reell sind. Die übrigen Formen gehen aus diesen hervor, indem die konkaven Stellen zwischen zwei Wendepunkten durch die Übergangsform des Flachpunktes hindurch konvex werden.

Dann gibt es vier Fälle, die zu neun Kurventypen Veranlassung geben.

I. K trifft alle Seiten eines Vierecks (Beisp. der Nr. 134 in Fig. 56). Diese Lage gibt zu drei Gattungen von Quartiken Anlaß, die in dem angezogenen Beispiel schon erörtert wurden. Es sind die folgenden:

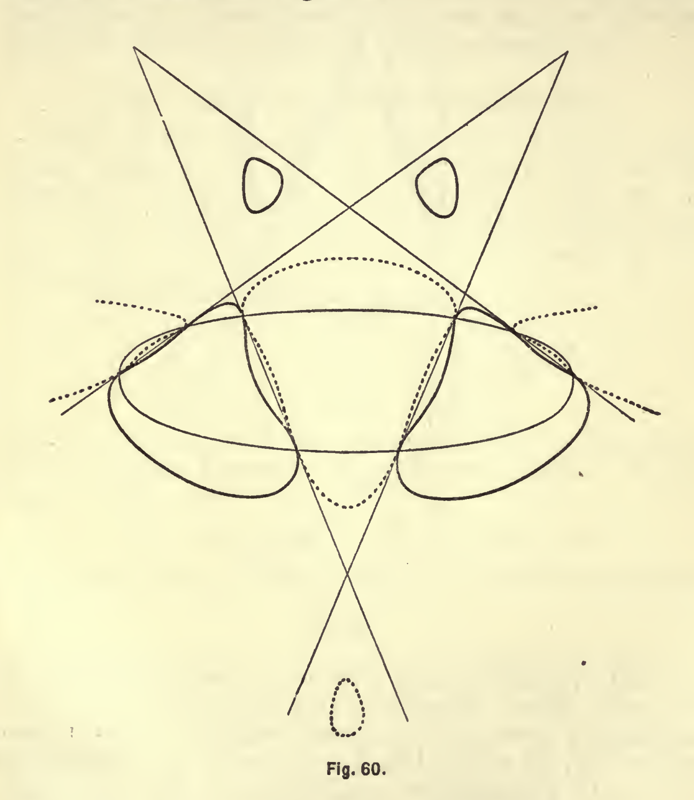


Fig. 60.

1. Ringförmige Quartik; 1 Quadrifolium, 1 inneres Oval.
2. Viereckskurve; 1 Quadrifolium, 2 Ovale.
3. Dreieckskurve; 4 Unifolien.

II. K trifft drei Seiten eines Vierecks und eine eines anderen Vierecks. Dies gibt folgende Möglichkeiten:

4. Viereckskurve; 1 Trifolium, 1 Unifolium, 1 Oval.
5. Dreieckskurve; 1 Bifolium, 2 Unifolien, 1 Oval.

In Fig. 59 ist der Typus 4 durch die ausgezogene, der Typus 5 durch die gestrichelte Kurve gegeben.

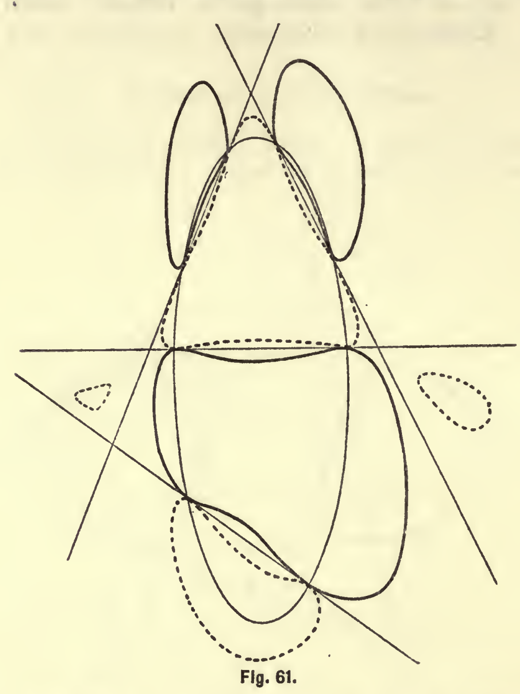


Fig. 61.

III. K trifft je zwei Seiten von zwei Vierecken. Es ist nicht schwer einzusehen, daß dies beim einen Viereck anliegende, beim anderen gegenüberliegende sein müssen, wie es Fig. 60 zeigt. Die Typen sind:

6. Viereckskurve; 2 Bifolien, 1 Oval (gestrichelt).
7. Dreieckskurve; 2 Bifolien, 2 Ovale (ausgezogen).

IV. K trifft zwei (gegenüberliegende) Seiten eines Vierecks und von jedem der beiden anderen je eine (Fig. 61):

8. Viereckskurve; 1 Bifolium, 2 Unifolien (ausgezogen).
9. Dreieckskurve; 1 Trifolium, 1 Unifolium, 2 Ovale (gestrichelt).

Fährt man in dieser Weise fort, so erhält man im ganzen 13 Lagen von K und 36 zugehörige Quartikenformen. Dazu kommen dann noch alle die Formen, welche die bei den vorhin aufgeführten Kurven vorhandenen Ovale nur teilweise oder gar nicht haben. Denn jedes Oval kann, indem es durch die Form eines isolierten Punktes geht, verschwinden. Den Schluß der Kette bildet die Quartik ohne reelle Punkte, wofür die Kurve $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0$ ein Beispiel ist.

§ 76. Kurven mit einfachen Singularitäten.

140. Die Entstehung eines isolierten Punktes wurde soeben erwähnt. Es sei nur noch bemerkt, daß es auch eigentliche Quartiken mit reeller Gleichung gibt, die nur 1, 2 oder 3 isolierte Punkte und außerdem keinen reellen Zug haben. Beispiele dafür sind die Kurven, die den Gleichungen entsprechen:

$$\text{I.}\quad x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + x_1^4 + x_3^4 = 0\,,$$

$$\text{II.}\quad x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2 + x_3^4 = 0\,,$$

$$\text{III.}\quad x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2 = 0\,.$$

Hat eine Quartik aber vier isolierte Punkte, so muß sie in zwei konjugiert imaginäre Kegelschnitte zerfallen. Hierfür mag die Kurve

$$f \equiv 2x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2(y^2 + z^2) = 0$$

als Beispiel dienen. Dieselbe läßt sich in der Form schreiben

$$u^2 + v^2 = 0\,,$$

wenn man $u = x^2 - y^2$, $v = x^2 - z^2$ setzt und hat daher nach Nr. 22, Beisp. 2 in allen Schnittpunkten von $u = 0$ und $v = 0$, d. i. in den vier Punkten $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ Doppelpunkte. In der Tat ist die Kurve das Produkt der beiden Kegelschnitte $u + iv = 0$ und $u - iv = 0$, die zu dem durch u und v (resp. deren Schnittpunkte) bestimmten Büschel gehören.

Bem. Will man direkt nachweisen, daß die Doppelpunkte von f isoliert sind, so hat man, etwa für den Punkt (1, 1) die Gleichung des Tangentenpaares zu bilden (vgl. S. 30):

$$(x-1)^2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]_{x=1} + 2(x-1)(y-1)\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right]_{\substack{x=1\\y=1}} + (y-1)^2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]_{y=1} = 0\,.$$

Dies gibt hier

$$2(x-1)^2 - 2(x-1)(y-1) + (y-1)^2 = 0\,,$$

ein Linienpaar mit imaginären Bestandteilen.

141. Ein Knoten entsteht, wenn zwei getrennt liegende Zweige sich in einen vereinigen. Betrachten wir zuerst den Fall der Ringkurve, so wird das innen befindliche Oval sich dem Quadrifolium nähern, eine Einbuchtung sich ihm entgegenstrecken und es entsteht eine Form, die wir uns an der PASCALschen Schnecke (Fig. 40) deutlich machen können, wenn wir dem äußeren Zug sechs reelle Wendepunkte (drei Einbuchtungen) verleihen. Zieht sich die innere Schleife zu einer Spitze zusammen, so entsteht eine Form, die der Kardioide ähnelt.

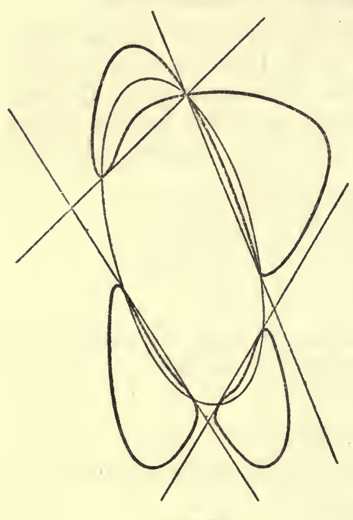


Fig. 62.

Bei auseinanderliegenden Zweigen entsteht ein Knoten dann, wenn der Kegelschnitt K durch eine Ecke eines der Vierecke geht. In dieser Ecke vereinigen sich dann die beiden Zweige (Fig. 62). Auch hier kann jeweils statt des Knotens eine Spitze auftreten.

Ein Knoten kann jedoch auch entstehen, wenn ein Zweig durchs Unendliche gehend sich von der anderen Seite mit sich selbst vereinigt. Dann spaltet sich der paare Zweig in zwei unpaare. Von diesen unpaaren Zügen hat aber jeder drei Wendepunkte und da bei Bildung eines Knotens zwei reelle Wendepunkte verloren gehen, muß der paare Zweig vorher acht Wendepunkte gehabt haben, d. h. der in Rede stehende Fall kann nur bei einem Quadrifolium eintreten. Dann kann außerdem nur noch ein Oval vorhanden sein (vgl. Nr. 122). Den Übergang zeigt (an der Stelle D_1) die Fig. 63. Dort ist auch noch das Oval (an der Stelle D_2) mit einem der unpaaren Züge zu einem zweiten Knoten

vereinigt. Würde man (an der Stelle D_3) einen dritten Knoten entstehen lassen, so hätten wir den Typus mit drei Knoten, der schon in Fig. 33 wiedergegeben wurde.

Beisp. Die Gleichung

$$x y^2 = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$$

stellt für alle Werte von a, b, c, d eine Quartik mit zwei unpaaren Zweigen dar. Diskutiert man die Gleichung nach der Methode von Abschnitt VI, so findet man für die Ecke $x = 0$, $z = 0$ die Näherungskurven $x y^2 = a b c d$ und $y^2 = x^3$, welche aussagen, daß die beiden unpaaren Zweige sich dort in einem Inflexionsknoten

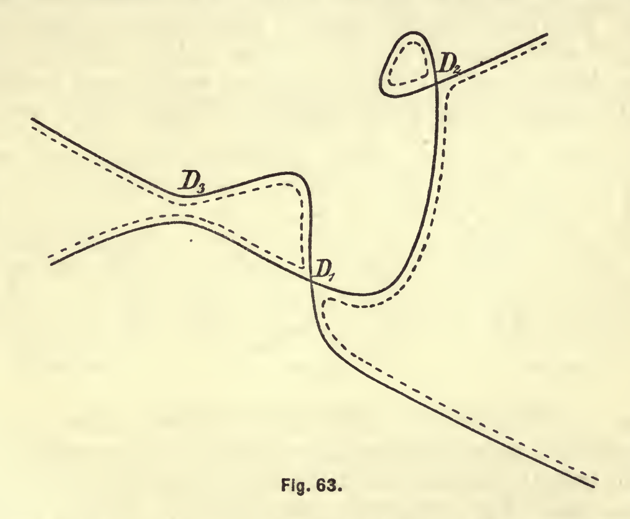


Fig. 63.

durchschneiden. Die eine Wendetangente ist die y-Achse; der betreffende Zweig geht, wenn $a < b < c < d$, durch den Punkt $x = a$, $y = 0$. Die Wendetangente des anderen Zweiges ist die unendlich ferne Gerade; derselbe geht durch $x = d$, $y = 0$. Zwischen $x = b$ und $x = c$ liegt das Oval. Es ist klar, daß, je nachdem $b = c$, $c = d$ oder $b = c = d$ ein isolierter Punkt, ein Knoten oder eine Spitze auftritt.

142. Um Kurven mit zwei Doppelpunkten zu erhalten, ist es nur nötig, von einer Kurve mit einem Doppelpunkte auszugehen und noch eine Verbindung herzustellen. Dies haben wir schon in Fig. 63 getan; auch in Fig. 62 ist deutlich, daß man auch die beiden unteren Unifolien wie

die oberen vereinigen könnte, so daß man zwei auseinanderliegende lemniskatische Züge erhielte. Durch Herstellung von noch einer weiteren Verbindung erhalten die Kurven drei Doppelpunkte. Da wir aber die fünf Typen der Kurven mit drei Doppelpunkten bereits kennen (vgl. § 36), so ist es besser, da es uns bloß um die gestaltlichen Verhältnisse zu tun ist, von den rationalen Quartiken auszugehen und durch »Trennen« oder »Verbinden« an einem der drei Knoten die Formen mit zwei Doppelpunkten abzuleiten. Zwei dieser Formen haben wir soeben angedeutet. Die der Fig. 63 ist deswegen bemerkenswert, weil sie nicht ins Endliche projiziert werden kann. Ein andere wurde schon früher gezeichnet (s. Fig. 9*). Diese kann auch aus einem Quadrifolium mit 2 Ovalen abgeleitet werden und deswegen einen weiteren Zug nicht enthalten. Ferner haben wir die

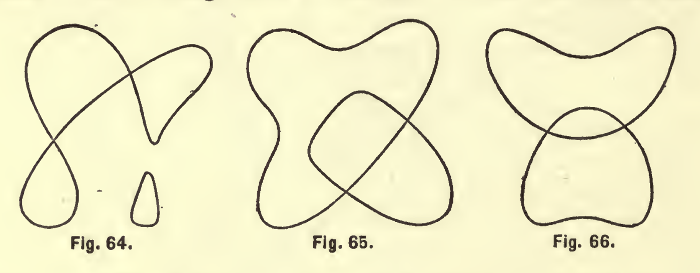


Fig. 64. Fig. 65. Fig. 66.

Form der Fig. 27, die noch ein Unifolium haben könnte, wie es dort strichpunktiert angedeutet ist. Man erhält diese Form (mit Unifolium) aus der Plückerschen Kurve (Fig. 55), wenn man dort an einem der äußeren Knoten trennt. Trennt man bei der Plückerschen Kurve in der Mitte, so bekommt man wieder zwei lemmiskatische Züge, verbindet man in der Mitte, so ergibt sich die Form der Fig. 9*. Trennt man aber an einem der äußeren Knoten so, daß die Wendung noch zu dem Zug mit zwei Knoten gehört, so hat dieser Zug an einer Schleife eine Einbuchtung und außerdem noch ein Oval (Fig. 64). Denselben Zug ohne das Oval erhält man aus der Kurve von Fig. 32, indem man entweder links oder rechts trennt. Durch Verbinden an einem dieser beiden Knoten erhält man Fig. 65, ein Bifolium mit einem es zweimal durchsetzenden Oval, und durch Verbinden am unteren Knoten die Form Fig. 66, die aus zwei

sich schneidenden Unifolien besteht. Verbindet man in Fig. 34 am unteren Knoten, so ergibt sich noch eine weitere Form, die nicht ins Endliche projiziert werden kann; ebenso, wenn man in der Fig. 33 die Spitze zuerst durch einen Knoten mit Schleife ersetzt und diesen auflöst, so daß sich ein Oval abtrennt.

Es ist selbstverständlich, daß auch hier überall nur die Maximalzahl der Wendepunkte und Züge angegeben ist[106]). Wie aus den vorhandenen Knoten mit Schleifen eine bez. zwei Spitzen entstehen können, mag aus den Figuren von 9* ersehen werden. Es ist nicht schwer, bei all unseren Deformationen das Zusammenfallen und Imaginärwerden der Doppeltangenten, wie dies in Fig. 9* angedeutet ist, zu verfolgen.

Im Falle von zwei Knoten können diese auch konjugiert imaginär sein. Der Übergang zu solchen Formen findet durch den Berührungsknoten statt, von dem wir gleich sprechen werden. Die Gestalt von Kurven mit zwei imaginären Doppelpunkten ist von der Gestalt derer mit zwei isolierten Punkten nicht wesentlich verschieden; nur wenn die Kurven bizirkular sind, also die Doppelpunkte in den imaginären Kreispunkten liegen, zeichnen sie sich durch eine sehr gleichmäßige Krümmung aus (vgl. die Figuren 38, 39 und 40).

§ 77. Kurven mit höheren Singularitäten.

143. Die verschiedenen bei Quartiken möglichen höheren Singularitäten wurden schon in Nr. 80 zusammengestellt. Wir werden jetzt nur die Entstehung derselben aus Formen ohne Singularitäten besser verstehen und angeben können, was für Zweige die Kurve im Maximum bei Existenz einer der Singularitäten haben kann.

---

[106]) Von Axel Harnack wurde bewiesen (Math. Ann. **10**, 1876, S. 188—198), daß die Maximalzahl der Züge für eine Kurve vom Geschlechte p gleich $p+1$ ist. Dies kann man für Quartiken und Kubiken leicht feststellen. Über die allgemeinen Gesetze, die die reelle Erscheinung einer algebraischen Kurve beherrschen, ist sonst bis jetzt noch außerordentlich wenig bekannt. D. Hilbert hat das „Problem der Topologie der algebraischen Kurven“ unter den *„Mathematischen Problemen“* aufgeführt, die er dem Internat. Math.-Kongr. Paris (1900) vorlegte. S. Arch. Math. (3) **1**, 1901, S. 223.

Die einfachste höhere Singularität ist der **Berührungsknoten,** der durch das Zusammenrücken zweier Doppelpunkte entsteht. Dabei sind wesentlich vier Fälle zu unterscheiden. **I.** Der Berührungsknoten entsteht dadurch, daß ein im Endlichen verlaufender paarer Zweig sich selbst berührt. Diese Form geht sowohl aus Fig. 27 hervor, wie aus Fig. 64. Wir sehen dabei, daß die beiden Doppeltangenten, die in der Tangente des Berührungsknotens koinzidieren, Doppeltangenten erster Art sind. Die Kurve kann demnach nur noch zwei Einbuchtungen haben. Die eine davon wird schon durch den sich selbst berührenden Zweig verursacht: die andere ist entweder an einer Schleife dieses Zweiges, so daß nur noch ein Oval vorhanden sein kann (Fig. 64), oder nicht an dem Zweig mit dem Berührungsknoten; dann kann außerdem noch ein Unifolium vorhanden sein, was für die Kurve der Fig. 27 schon oben festgestellt wurde. **II.** Der Berührungsknoten entsteht durch Selbstberührung eines nicht ins Endliche projizierbaren paaren Zweiges. Auch dieser Zweig kann ein Unifolium oder ein Bifolium sein und es ist dann außerdem noch ein Unifolium oder nur ein Oval möglich (aus Fig. 33 abzuleiten). **III.** Der Berührungsknoten entsteht dadurch, daß zwei paare Zweige sich gegenseitig berühren. Diese Fälle gehen aus Fig. 65 und 66 hervor und zwar kann die Berührung bei der Form, die aus Fig. 65 hervorgeht, von außen oder von innen, bei der, die aus Fig. 66 entspringt, nur von außen stattfinden. Auch hier sehen wir leicht, daß die Tangente des Berührungsknotens für zwei Doppeltangenten erster Art zählt, die Kurve also nur zwei Einbuchtungen im ganzen haben kann. Es wird entweder ein Bifolium von einem Oval oder ein Unifolium von einem anderen solchen berührt, wie dies aus den Figuren ersichtlich ist. **IV.** Der Berührungsknoten ist isoliert. Dann entsteht er durch Vereinigung zweier isolierten Punkte. Um diese Form durch Deformation herzuleiten, müssen wir von einer Kurve mit zwei Ovalen ausgehen, also entweder von Form 2 oder 7 oder 9 der Nr. 139. Nehmen wir etwa die Kurve 7 als Beispiel. Die Kurve 7 (Fig. 60) hat noch vier Einbuchtungen. Diese bleiben bestehen, auch wenn die beiden Ovale zu isolierten Punkten zusammenschrumpfen. Sobald aber diese beiden isolierten Punkte sich vereinigen wollen, kann dies nur über die zwei äußeren Doppeltangenten

erster Art hinweg geschehen, die sich infolgedessen abtrennen müssen und in die Tangente des isolierten Berührungsknotens koinzidieren. Die Kurve hat also auch in diesem Falle nur noch zwei Einbuchtungen, die auf zwei Unifolien, wie im vorliegenden Falle, oder auf ein Bifolium, wie dies aus 2 und 9 hervorginge, verteilt sein können.

144. Die **Schnabelspitze** absorbiert noch einen der beim Berührungsknoten vorhandenen reellen Wendepunkte. Daher kann die Quartik außer der Einbuchtung, die durch die Schnabelspitze selbst hervorgerufen wird, nur noch eine davon unabhängige haben. Diese befindet sich entweder nicht auf dem Zweig der Schnabelspitze, dann kann außerdem noch ein Unifolium vorhanden sein (Fig. 24, *3*, *4*) oder aber die Einbuchtung ist mit der Schnabelspitze auf demselben Zweig, dann kann außerdem bloß noch ein Oval auftreten (entsteht aus Fig. 64).

Alle anderen Singularitäten machen die Kurve ohne weiteres rational. Eine rationale Quartik (6. Klasse) hat aber überhaupt nur mehr vier Doppeltangenten und zwar sind es die Doppeltangenten erster Art, die übrig bleiben. Beachtet man dies, so findet man, daß beim dreifachen Punkt jeder Art (Nr. 85a), wie bei allen Kurven mit drei Knoten, nur noch zwei reelle Wendepunkte vorhanden sein können, was bei den ins Endliche projizierbaren Formen zu e i n e r Einbuchtung Anlaß gibt.

Betrachten wir nun den **Oskulationsknoten**, der aus drei konsekutiven Doppelpunkten entsteht und drei Doppeltangenten absorbiert, so ist ohne weiteres klar, daß auch hier nur eine einzige Einbuchtung vorhanden sein kann und die Kurve, wie jede rationale, aus einem einzigen Zuge besteht. Der Oskulationsknoten hat drei Formen, die den Formen I, III, IV des Berührungsknotens entsprechen. Im Falle I hat die Kurve, äußerlich betrachtet, die Form von Fig. 20 für $\lambda = +1$, nur daß die Zweige im Berührungspunkt übereinandergreifen. Dies ist bei Fig. 37 angedeutet, die den Typus III wiedergibt. Nur könnte dort der äußere Zweig eine Einbuchtung haben, während im vorigen Falle die Einbuchtung durch die Form an sich schon gegeben ist. Wenn der Oskulationsknoten, wie im Falle IV, isoliert ist, so kann der paare Zweig höchstens ein Unifolium sein.

Eine Quartik mit **Berührungsknotenspitze** kann nur aus dem einen Zug bestehen, der die Spitze trägt. Dieser hat nur einen reellen Wendepunkt und weiter keine Einbuchtung.

145. Zusatz. Das System der 28 Doppeltangenten einer Quartik wurde schon von Steiner und Hesse (1853), dann besonders von Aronhold (1864) eingehend untersucht. In neuerer Zeit haben Frobenius (1886) und vor allem Ciani (1895, 1898) die Theorie derselben weiter gefördert, nachdem schon vorher Geiser (1869) verschiedene Sätze durch Beziehung der Quartik zu einer Fläche 3. Ordg. dem Verständnis näher gebracht hatte. Wir verweisen den Leser, der sich hierüber unterrichten will, zuerst auf die zusammenfassenden Behandlungen bei Salmon-Fiedler und Andoyer (L. V.), sodann auf ein Sammelreferat von H. E. Timerding[107]), wo die hauptsächlichsten der einschlägigen Arbeiten zitiert sind. Hier geben wir nur eine Andeutung, auf welchem Wege man, ohne Zuhilfenahme räumlicher Betrachtungen, wenigstens zu einem Teil der heute bekannten Resultate gelangen kann.

Wir studierten schon bei Kubiken Kegelschnitte, die die Kubik in drei Punkten berührten (Nr. 101). Ebenso gibt es bei der Quartik Systeme von Kegelschnitten, welche sie in vier Punkten berühren. In der Tat umhüllt der Kegelschnitt

$$\Theta \equiv \lambda^2 \mathsf{M} + 2\lambda \mathsf{K} + \mathsf{N} = 0,$$

wo M, K, N drei beliebige Kegelschnitte sind, die Kurve 4. Ordg.

$$\mathsf{Q} \equiv \mathsf{M}\mathsf{N} - \mathsf{K}^2 = 0.$$

Diese Gleichung sagt für die Kegelschnitte M und N, also für spezielle Lagen von Θ, direkt aus, daß sie Q in vier Punkten (wo nämlich $\mathsf{K} = 0$ ist) berühren. Zudem enthält Q 16 eigentliche Konstante, so daß die Gleichung jeder Quartik in diese Form gebracht werden kann. Nun hat man aber identisch

$$\begin{aligned}\mathsf{Q} \equiv (\lambda^2 \mathsf{M} + 2\lambda \mathsf{K} + \mathsf{N})(\mu^2 \mathsf{M} + 2\mu \mathsf{K} + \mathsf{N}) \\ - [\lambda\mu \mathsf{M} + (\lambda + \mu)\mathsf{K} + \mathsf{N}]^2 = 0,\end{aligned}$$

---

[107]) *„Über die Gruppierungen der Doppeltangenten einer ebenen Kurve vierter Ordnung."* Journ. f. Math. **122**, 1900, S. 209—226.

so daß, was vorhin für M und N ausgesagt wurde, für jeden Kegelschnitt Θ gilt.

Jedes solche System von Kegelschnitten Θ enthält nun, da die Diskriminante der Gleichung in λ vom 6. Grad wird, sechs zerfallene Kegelschnitte, d. i. sechs Paare von Doppeltangenten. Nehmen wir ein solches Paar $T_1 T_2 \equiv M$ und ein zweites $T_3 T_4 \equiv N$, so ergibt sich die aus den Nrn. 77 und 133 bekannte Gleichungsform

$$T_1 T_2 T_3 T_4 - K^2 = 0,$$

wo nur λ in K^2 hineinmultipliziert ist. Die acht Berührungspunkte der vier Doppeltangenten T_i liegen also in einem Kegelschnitt.

Zum Schluß wollen wir nur noch die Zahl solcher Kegelschnitte K angeben. Gehen wir aus von der Gleichung

$$T_1 T_2 N - K^2 = 0,$$

die man auch auf die Form bringen kann

$$T_1 T_2 \{\lambda^2 T_1 T_2 + 2\lambda K + N\} - (\lambda T_1 T_2 + K)^2 = 0,$$

so wissen wir aus dem vorigen, daß es sechs Werte von λ gibt, die den Kegelschnitt der geschweiften Klammer zu einem Linienpaar machen. Darunter ist der Wert $\lambda = \infty$, der einer Trivialität entspricht.

Hiernach gibt es für jedes Paar von Doppeltangenten T_1, T_2 fünf andere Paare, so daß durch deren acht Berührungspunkte ein Kegelschnitt K geht.

Da nun die 28 Doppeltangenten $\frac{1}{2} \cdot 28 \cdot 27 = 378$ Paare bilden, jeder Kegelschnitt K aber aus sechs Paaren der ihm entsprechenden vier Doppeltangenten abgeleitet werden kann, so gibt es $378 \cdot \frac{5}{6} = 315$ Kegelschnitte K. Jede Quartik kann also auf 315 Arten in die Form

$$T_1 T_2 T_3 T_4 - K^2 = 0$$

gebracht werden.

§ 78. **Kurven vierter Klasse.**

146. Für die Kurven vierter Klasse können wir natürlich nur einige typische Beispiele geben. Übertragen wir zunächst Kurven 4. Ordg. ohne Singularitäten ins Dualistische, so entspricht offenbar jedem Oval wieder ein Oval, jedem

Unifolium ein geschlossener Zug mit zwei Spitzen und einem Doppelpunkt, wie er durch Fig. 72(b) annähernd dargestellt wird[108]), einem Bifolium entsprechend ein Zug mit zwei Spitzenpaaren und zwei Doppelpunkten (s. den inneren Zweig von Fig. 73) usw. Für die dem Trifolium und Quadrifolium entsprechenden Züge von Klassenquartiken sind die Zweige *a*

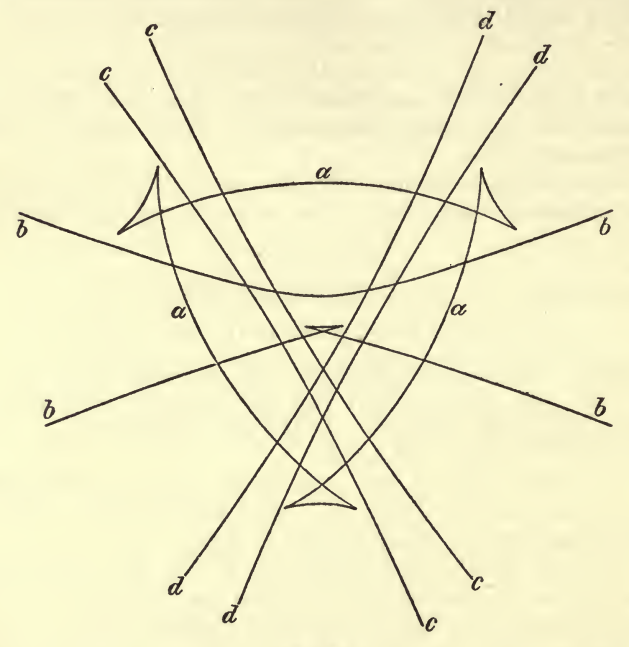


Fig. 67.

bez. *b* der Fig. 67 und 68 Beispiele. Die »Doppelpunkte erster Art« sind hier diejenigen, welche je einem Spitzenpaar zugeordnet sind. Außerdem muß jeder Zug jeden andern, sofern er nicht von demselben eingeschlossen wird, in vier reellen »Doppelpunkten zweiter Art« schneiden, entsprechend den vier Doppeltangenten, die zwischen zwei Zweigen einer Ordnungsquartik möglich sind. Wir haben, um gleich ein

[108]) Diese Grundform wurde gelegentlich als »Steigbügel« bezeichnet.

Beispiel zu geben, das, obwohl alle 28 Doppelpunkte reell im Endlichen liegen, noch recht übersichtlich ist, die ge-

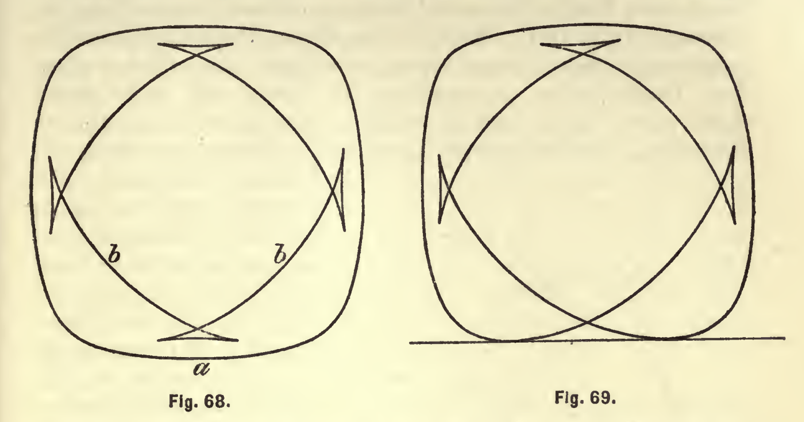


Fig. 68. Fig. 69.

strichelte Kurve der Fig. 61 mit Trifolium, Unifolium und zwei Ovalen polarisiert (Fig. 67). Der Leser erkennt in a

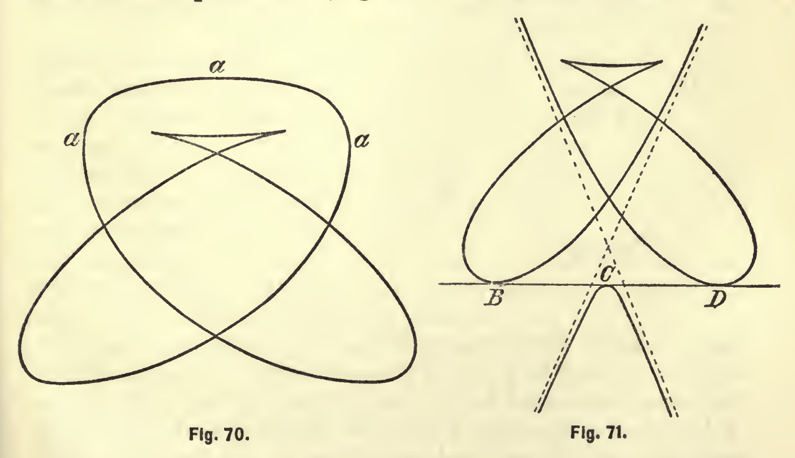


Fig. 70. Fig. 71.

die reziproke Figur des Trifoliums, in b die des Unifoliums und in c, d die beiden Ovale. Dieses Beispiel muß für die Formen mit auseinanderliegenden Zweigen genügen[109].

[109]) In F. KLEINS Abhandlung *„Über den Verlauf der Abelschen Integrale bei den Kurven vierten Grades“* (Math. Ann. **10**, 1876,

Den Typus der Ringkurve haben wir in Fig. 68 wiedergegeben. Vereinigt man nach der Methode von Nr. 24a hier die beiden Zweige an einer Stelle, so entsteht eine Doppeltangente (Fig. 69). Würde man diese Doppeltangente im entgegengesetzten Sinne lösen, so erhielte man wieder einen dem Quadrifolium entsprechenden Zweig mit unendlichen Ästen, wie Fig. 4* (2) nur daß im Innern drei Spitzenpaare wären[110]). Durch weiteres Verbinden erhält man aus Fig. 69 Formen mit zwei und schließlich die rationale Klassenquartik mit drei Doppeltangenten und vier Doppelpunkten erster Art (Fig. 70), die zur Kurve der Fig. 32 dualistisch ist. Wir wollen im folgenden noch darstellen, wie aus dieser Form die Kurven vierter Klasse mit dreifacher Tangente entstehen.

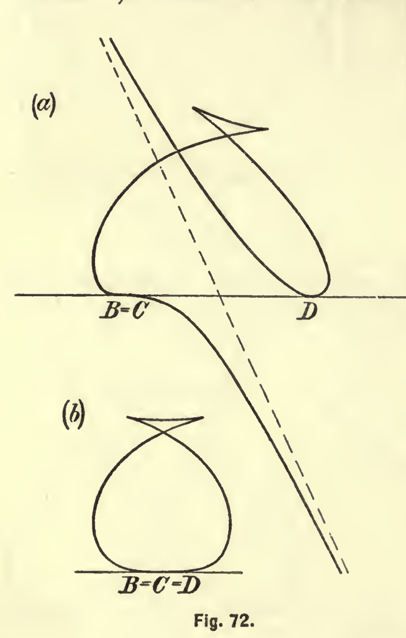


Fig. 72.

Macht man nämlich den Zug a hyperbolisch, so kann derselbe von der andern Seite an die wagrechte Doppeltangente herantreten, so daß die drei Doppeltangenten in eine dreifache Tangente zusammenfallen (Fig. 71). Läßt man hier zwei der Berührungspunkte, etwa B und C zusammenrücken, so entsteht die Form der Fig. 72 (a) mit Wendetangente und darauf liegendem Berührungspunkt (eine Kurve 5. Ordg.), die genau zu Fig. 26 (α) dualistisch ist. Fällt auch noch D in den Wendepunkt, so erscheint die Form Fig. 72 (b)

S. 365—397) ist eine Figur der aus vier »Steigbügeln« bestehenden Klassenquartik gegeben.

[110]) Solche Figuren sind in der eben zitierten Abhandlung Kleins, sowie in desselben Verfassers *„Über eine neue Art von Riemannschen Flächen"*, Math. Ann. **7**, 1874, S. 588—596 enthalten.

mit Flachpunkt (4. Ordg.), in dem die drei Berührungspunkte der dreifachen Tangente koinzidieren, wie im reziproken Spitzpunkt die drei Tangenten. Die zu Fig. 72 (b) dualistische Kurve erhalten wir aus Fig. 22, wenn wir sie oben einbuchten, oder aus Fig. 29, wenn wir unten den Spitzpunkt entstehen lassen.

Außer diesen Formen der dreifachen Tangente, zu denen noch die mit zwei konjugiert imaginären Berührungspunkten tritt, können bei Klassenquartiken nur die höheren Singularitäten der Ordnungsquartiken auftreten, da diese sämtlich zu sich selbst reziprok sind. Allerdings sieht etwa ein Zweig mit Schnabelspitze ins Dualistische übertragen wesentlich anders aus, da keine Wendepunkte, sondern statt derselben Spitzen auftreten, was oft zur Folge hat, daß die Kurve gezwungen ist, durchs Unendliche zu gehen. Der Leser möge sich selbst solche Kurven entwerfen.

Die Wendetangente ist für die Klassenquartik dasselbe, was für die Ordnungsquartik eine Spitze ist. Wir erhalten sonach, wenn wir einer rationalen Kurve vierter Klasse zwei Wendetangenten und eine Doppeltangente verleihen, eine Kurve ($12 - 2 \cdot 3 - 2 =$) 4. Ordg., die gemäß den Plückerschen Formeln zwei Spitzen unb einen Doppelpunkt haben muß. Dies ist die zu sich selbst reziproke Form der Fig. 29. Auch die aus dieser hervorgehende Form mit Flach- und Spitzpunkt (Fig. 22) gehört hierher. Hat aber die Kurve vierter Klasse drei Wendetangenten, so wird sie 3. Ordg. und besteht entweder aus einer Serpentine allein oder aus einer Serpentine mit Oval (Fig. 2).

Beisp. 1. Der Leser wird sich noch der Astroide erinnern, jener (rationalen) Kurve vierter Klasse mit zwei eigentlichen und einer isolierten Spitzendoppeltangente (S. 41). Wie jede rationale Klassenquartik ohne Wendetangenten hatte dieselbe vier Doppelpunkte. Wir haben schon im Beisp. von Nr. 26 eine Kurve (die Kreuzkurve) angegeben, die zur Astroide reziprok ist. Diese Kreuzkurve hat aber die spezielle Eigentümlichkeit, daß die zwei reellen Inflexionsknoten, die die Kurve als dualistische Gegenstücke zu den beiden reellen Spitzen-Doppeltangenten der Astroide hat, im Unendlichen liegen. Der Leser mag sich selbst die Astroide in bezug auf einen beliebig außerhalb liegenden Kreis polarisieren, um die rationale Quartik zu erhalten, die zwei reelle Inflexionsknoten im Endlichen und zwei reelle Asymptoten hat.

Dieselbe gehört zur Gattung der Fig. 33, wenn man dort die Spitze durch einen isolierten Punkt ersetzt.

Beisp. 2. Als weiteres Beispiel für eine Klassenquartik wollen wir die Gleichung der Parallelkurve einer Ellipse aufstellen. Die Gleichung der Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ in Linienkoordinaten ist bekanntlich $a^2u^2+b^2v^2-w^2=0$. Wenn nun eine Tangente der Ellipse die Koordinaten u, v, w hat, ihre Gleichung also $ux+vy+w=0$ ist, so lautet die Gleichung einer dazu parallelen Geraden (im Abstande c)

$$\frac{ux+vy+w}{\sqrt{u^2+v^2}}+c=0.$$

Diese Gerade hat also die Koordinaten u, v, $w+c\sqrt{u^2+v^2}$. Man erhält demnach die Parallelkurve der Ellipse (und ebenso jeder an-

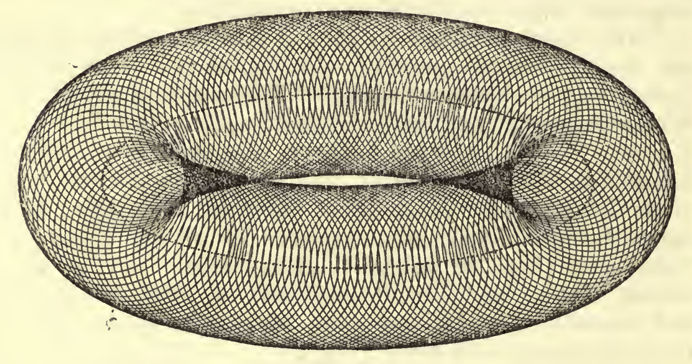


Fig. 73.

deren Kurve), wenn man in ihre Linienkoordinatengleichung statt w die Summe $w+c\sqrt{u^2+v^2}$ einsetzt. Stellt man die ungeraden Potenzen der Quadratwurzel auf eine Seite und quadriert, so ergibt sich die implizite Gleichung der Parallelkurve, die immer vom Grade 2ν ist, wenn ν die Klasse der gegebenen Kurve bedeutet.

In unserem Falle wird diese Gleichung vierter Klasse:

$$\{u^2(a^2-c^2)+v^2(b^2-c^2)-w^2\}^2=4\,c^2(u^2+v^2)\,w^2.$$

Man zeichnet die Kurve am leichtesten, wenn man sie sich von Kreisen mit Radius c umhüllt denkt, deren Mittelpunkt auf der Ellipse läuft. Sie gehört in jedem Fall zum

Typus der Ringkurve. Ihr äußerer Teil ist immer ein Oval, während das Innere je nach der Größe von c auch ein Oval, oder, wie in dem in Fig. 73 dargestellten Fall, wo $b^2/a < c < b$ genommen wurde, ein »Klassen-Bifolium« ist. Die zwei Doppelpunkte unserer Figur können sich in einen Berührungsknoten vereinigen (für $c = b$) und dann verschwinden, so daß der Zweig nur vier Spitzen hat (aber zwei reelle Doppeltangenten statt der Doppelpunkte). Die weiteren Wandlungen dieses inneren Zweiges mag der Leser selbst verfolgen.

Diese Parallelkurve hat selbstverständlich dieselbe Evolute wie die Ellipse (Nr. 29, Beisp. 1). Wird die Ellipse zum Kreis, so zerfällt die Parallelkurve in zwei Kreise. Für Hyperbel und Parabel lassen die Parallelkurven sich ganz entsprechend aufstellen. Bezüglich der Gestalt von Fig. 73 sei noch bemerkt, daß die Kurve die Umrißlinie der Projektion eines Wulstes (= torus) darstellt, der von allen Kugeln eingehüllt wird, deren Mittelpunkte einen Kreis beschreiben. Deshalb heißt sie auch »Toroide«.

Wir können noch anmerken, daß die Transformation, durch die man aus einer Kurve die Parallelkurve erhält, eine spezielle Berührungstransformation ist, die man als »Dilatation« (Sophus Lie) bezeichnet. Vgl. Lie-Scheffers, *Geometrie der Berührungstransformationen,* I. Bd., Leipzig (Teubner) 1896.

ABSCHNITT XIV.

SYSTEME VON KURVEN.

§ 79. **Allgemeines.**

147. Betrachtet man nicht eine einzelne Kurve für sich, sondern irgend zwei oder mehrere solche, so spricht man ganz allgemein von einem »System von Kurven«. Solche Betrachtungen sind uns nicht fremd. Unser ganzer Abschnitt X handelte von den einem System von zwei Kurven verschiedener (ev. auch gleicher) Ordnung gemeinsamen Punkten. Die Begriffe des Büschels (der Schar), des Netzes (Gewebes) und des k-stufigen linearen Systems von Kurven gleicher Ordnung (oder Klasse; s. S. 183) wurden schon aufgestellt und verschiedentlich verwendet. Andrerseits bilden offenbar die Kurvenreihen, deren Einhüllende wir in den §§ 11 und 12 bestimmten, nicht-lineare Kurvensysteme. Ja es lassen sich leicht Systeme von unendlich vielen Kurven denken, die überhaupt nicht durch eine einzige rationale Gleichung dargestellt werden können. Das einfachste derartige System ist gewiß die Gesamtheit der Tangenten einer nichtrationalen n-ik, während das Tangentensystem einer rationalen n-ik durch eine einzige rationale Gleichung (vgl. Nr. 28, Beisp. 3) darstellbar ist. Wir wollen aber noch ein Beispiel geben, zugleich als Vorbereitung für eine spätere Anwendung, das diese Tatsache auch analytisch deutlich macht.

Beisp. Wir suchen das System aller Kegelschnitte, die durch drei Punkte gehen und eine Gerade G berühren. Nehmen wir die drei Punkte als Koordinatenecken, so können wir das Netz der durch die drei Punkte gehenden Kegelschnitte mit Hilfe dreier homogenen Parameter a_1, a_2, a_3 in der Form darstellen (vgl. Nr. 73)

$$a_1 x_2 x_3 + a_2 x_3 x_1 + a_3 x_1 x_2 = 0. \tag{1}$$

Ist dann

$$G \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 \tag{2}$$

und soll diese Gerade eine Tangente an (1) sein, so erhalten wir als Bedingung die Linienkoordinatengleichung von (1), wo aber die u_i als fest und die a_i als variabel zu denken sind (nach Nr. 25, Beisp. 1):

$$\begin{vmatrix} 0 & a_3 & a_2 & u_1 \\ a_3 & 0 & a_1 & u_2 \\ a_2 & a_1 & 0 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \equiv u_1^2 a_1^2 + u_2^2 a_2^2 + u_3^2 a_3^2 \\ - 2 u_1 u_2 a_1 a_2 - 2 u_2 u_3 a_2 a_3 - 2 u_3 u_1 a_3 a_1 = 0 , \end{array} \tag{3}$$

so daß also Gleichung (1) in Verbindung mit der (in den a_i) quadratischen Gleichung (3) das verlangte System darstellt.

Gibt man noch eine zweite Gerade Γ, so erhält man eine zweite quadratische Gleichung für die a_i. Die Aufgabe, einen Kegelschnitt aus 3 Punkten und 2 Tangenten zu bestimmen, hat demnach 4 Lösungen.

§ 80. Systeme von zwei Kurven. Das Büschel.

148. Betrachten wir nun zwei Kurven, zunächst von verschiedenen Ordnungen

$$F^{(m)}(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \text{und} \quad \Phi^{(n)}(x_1, x_2, x_3) = 0 , \tag{4}$$

so kann man nach den Punkten (y) fragen, denen in bezug auf beide Kurven dieselbe gerade Polare entspricht. Die Gleichungen der beiden Polargeraden lauten

$$\begin{cases} x_1 F_1^y + x_2 F_2^y + x_3 F_3^y = 0 \\ x_1 \Phi_1^y + x_2 \Phi_2^y + x_3 \Phi_3^y = 0 \end{cases} \qquad \left[F_i \equiv \frac{\partial F}{\partial x_i}\right] \tag{5}$$

und es ergibt sich als Bedingung

$$F_1 : F_2 : F_3 = \Phi_1 : \Phi_2 : \Phi_3 \tag{6}$$

oder, was dasselbe ist

$$\begin{cases} F_1 \Phi_2 - F_2 \Phi_1 = 0 \\ F_2 \Phi_3 - F_3 \Phi_2 = 0 \\ F_3 \Phi_1 - F_1 \Phi_3 = 0 . \end{cases} \tag{6*}$$

Die zwei ersten Gleichungen von (6*) haben $(m + n - 2)^2$ gemeinschaftliche Lösungen, die aber nicht sämtlich auch

der dritten Gleichung genügen. Man sieht nämlich sofort, daß die gemeinschaftlichen Lösungen von $F_2 = 0$, $\Phi_2 = 0$ wohl die ersten beiden, nicht aber die dritte Gleichung erfüllen. Diese $(m-1)(n-1)$ Lösungen sind in Abzug zu bringen und es ergibt sich, da

$$(m+n-2)^2 - (m-1)(n-1)$$
$$\equiv (m-1)^2 + (m-1)(n-1) + (n-1)^2,$$

der Satz:

Es gibt

$$(m-1)^2 + (m-1)(n-1) + (n-1)^2$$

Punkte in der Ebene, die in bezug auf eine beliebige m-ik und eine beliebige n-ik dieselbe Polargerade haben.

Für $m = n$ reduziert sich diese Zahl auf

$$3(n-1)^2.$$

149. Sind nun überhaupt F und Φ von der n^{ten} Ordnung, so stellt

$$\mathfrak{B} \equiv F + \lambda \Phi = 0 \tag{7}$$

ein Büschel, d. i. eine ∞^1-fache Mannigfaltigkeit von n-iken dar. Legen wir diesen Kurven noch eine Bedingung auf, so muß sich eine endliche Anzahl ergeben. Als solche Bedingung können wir die wählen, daß eine Kurve des Büschels $\mathfrak{B}$ einen Doppelpunkt (y) habe.

Die Bedingungen hierfür sind

$$\left\{\begin{aligned} F_1^y + \lambda \Phi_1^y &= 0 \\ F_2^y + \lambda \Phi_2^y &= 0 \\ F_3^y + \lambda \Phi_3^y &= 0. \end{aligned}\right. \tag{6†}$$

Durch Elimination der y_i ergibt sich die Diskriminante vom Grade $3(n-1)^2$ in λ (s. S. 56, oben). Man sieht aber ohne weiteres, daß die Gleichungen (6†) sich durch Elimination von λ auf (6*) zurückführen lassen. Demnach können wir im Zusammenhalt mit dem Vorigen sagen:

In einem Büschel von Kurven n^{ter} Ordnung befinden sich $3(n-1)^2$ Individuen mit Doppelpunkt. Diese Doppelpunkte haben die Eigenschaft, daß ihre Polargerade in bezug auf alle Kurven des Büschels dieselbe ist.

Für eine beliebige Kurve des Büschels $\mathfrak{B}$ mit dem Parameter Λ lautet nämlich die Polare

$$x_1(F_1^y + \Lambda \Phi_1^y) + x_2(F_2^y + \Lambda \Phi_2^y) + x_3(F_3 + \Lambda \Phi_3^y) = 0,$$

was sich infolge ($6^\dagger$) mit

$$x_1 F_1^y + x_2 F_2^y + x_3 F_3^y = 0$$

als identisch erweist.

Beisp. 1. In einem Kegelschnittbüschel gibt es in der Tat 3 Linienpaare, deren Doppelpunkte die Ecken des den beiden Grundkegelschnitten und infolgedessen dem ganzen Büschel gemeinsamen Polardreiecks sind und daher die Eigenschaft haben, daß ihre Gegenseite je die Polare ist in bezug auf das ganze Büschel. Vgl. z. B. die Figur auf S. 233 in Doehlemanns *Geometr. Transformationen*, I. Teil.

Beisp. 2. In einem Büschel von Kubiken gibt es 12 Kurven mit Doppelpunkt. Die 12 Punkte, in denen die Doppelpunkte auftreten, heißen »kritische Zentra«. Diese wurden besonders von Plücker in seinem *System* beim Studium der Formen der Kurven 3. Ordg. im Sinne unseres § 24 benutzt.

150. Ein Büschel ist dadurch charakterisiert, daß durch jeden Punkt der Ebene eine einzige Kurve des Systems geht. Es erhebt sich die weitere Frage, wie viele Kurven des Büschels eine gegebene Gerade berühren. Diese Frage können wir gleich allgemeiner fassen und die Zahl der Kurven eines Büschels n^{ter} Ordnung zu bestimmen suchen, die eine gegebene m-ik berühren.

Sei die gegebene m-ik

$$\Psi^{(m)} = 0$$

und das Büschel

$$F^{(n)} + \lambda \Phi^{(n)} = 0,$$

so ergeben sich für den Berührungspunkt (y) die Gleichungen

$$\Psi_1^y : \Psi_2^y : \Psi_3^y = F_1^y + \lambda \Phi_1^y : F_2^y + \lambda \Phi_2^y : F_3^y + \lambda \Phi_3^y \tag{8}$$

oder das Gleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{l} F_1 + \lambda \Phi_1 + \varkappa \Psi_1 = 0 \\ F_2 + \lambda \Phi_2 + \varkappa \Psi_2 = 0 \\ F_3 + \lambda \Phi_3 + \varkappa \Psi_3 = 0 . \end{array}\right. \tag{8*}$$

Eliminieren wir hier λ und $\varkappa$, so ergibt sich für den Punkt (y) eine Bedingungsgleichung, die uns als »JAKOBIsche Determinante« (S. 236) schon bekannt ist:

$$(9) \qquad J \equiv \begin{vmatrix} F_1 & \Phi_1 & \Psi_1 \\ F_2 & \Phi_2 & \Psi_2 \\ F_3 & \Phi_3 & \Psi_3 \end{vmatrix} = 0 ,$$

vom Grade $2n + m - 3$. Zugleich müssen die gesuchten Berührungspunkte auf $\Psi = 0$ liegen. Wo also J und Ψ sich schneiden, sind solche Punkte. Also haben wir den Satz:

In einem Büschel n^{ter} Ordnung gibt es $m(2n + m - 3)$ Individuen, die eine gegebene m-ik berühren.

Hat Ψ d Doppelpunkte und r Spitzen, so vermindert sich diese Zahl um $2d + 3r$, da sich J in diesen Singularitäten wie die erste Polare verhält. Dies läßt sich unschwer zeigen, wenn man den Anfangspunkt in die Singularität legt und J in der Form schreibt:

$$(10) \qquad J \equiv A_1 \Phi_1 + A_2 \Phi_2 + A_3 \Phi_3 = 0 ,$$

wo die A_i die betr. Unterdeterminanten bedeuten, Funktionen $2(n-1)^{ter}$ Ordnung. Ist dann etwa

$$(11) \qquad \Phi \equiv (a x^2 + b y^2) z^{m-2} + u^{(3)} z^{m-3} + \ldots + u^{(m)} = 0 ,$$

so verschwinden natürlich Φ_1, Φ_2, Φ_3 für $x = 0$, $y = 0$, also auch J und wenn $a = 0$, d. h. Φ eine Spitze hat, haben $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = 0$ die x-Achse als gemeinschaftliche Tangente. Das nämliche gilt also für J.

Spezielle Fälle. **a)** Jede Gerade der Ebene wird von $2(n-1)$ Kurven des Büschels berührt. — **b)** In einem Geradenbüschel sind $n(n-1) - 2d - 3r$ Gerade, die eine gegebene n-ik berühren. Dies ist die uns längst bekannte Klassenzahl. — **c)** In einem Kegelschnittbüschel gibt es $n(n+1)$ Kegelschnitte, die eine gegebene n-ik, speziell 6, die einen gegebenen Kegelschnitt berühren.

151. Das Resultat dieser Untersuchung können wir noch etwas anders fassen. Wir sehen, es ist möglich eine Gleichung $\Theta(\lambda) = 0$ vom $m(2n + m - 3)^{ten}$ Grade in λ aufzustellen, welche die Parameter gibt, die den berührenden Kurven entsprechen. In dieser Gleichung treten aber auch die

Koeffizienten von F und Φ in demselben Grade auf. Denn wenn der Koeffizient eines Gliedes in F etwa a und der des entsprechenden Gliedes in Φ b ist, so ist der in Betracht kommende Koeffizient in (8*) $a + \lambda b$. Sehen wir also von Φ ganz ab und suchen nur die Bedingung in den Koeffizienten (die Invariante), die ausdrückt, daß F und Ψ sich berühren, so ist diese in den Koeffizienten von F vom Grade $m(2n + m - 3)$. Auf ganz entsprechende Weise fände man den Grad dieser sog. »Berührungs- oder Takt-Invariante« Θ in den Koeffizienten von Ψ vom Grade $n(2m + n - 3)$. Zusammengefaßt:

Die Berührungsinvariante Θ für zwei Kurven $F^{(n)} = 0$ und $\Psi^{(m)} = 0$ ist vom Grade $m(2n + m - 3)$ in den Koeffizienten von F und vom Grade $n(2m + n - 3)$ in den Koeffizienten von Ψ.

§ 81. Systeme von drei Kurven. Das Netz und seine Jakobische Kurve.

152. Wir denken uns nun drei Kurven, zunächst verschiedener Ordnung

$$F^{(l)} = 0\,, \quad \Phi^{(m)} = 0\,, \quad \Psi^{(n)} = 0$$

und bilden die Jakobische Determinante dieser drei Funktionen

$$J \equiv \begin{vmatrix} F_1 & \Phi_1 & \Psi_1 \\ F_2 & \Phi_2 & \Psi_2 \\ F_3 & \Phi_3 & \Psi_3 \end{vmatrix} = 0\,,$$

von der Ordnung $l + m + n - 3$, so resultiert aus dem Vorhergehenden sofort, daß J durch alle eventuellen Doppelpunkte und Spitzen der drei Grundkurven hindurchgeht, durch letztere in der Richtung der Tangente.

Die Forderung, daß die drei geraden Polaren eines Poles (y) identisch seien, können wir hier nicht aufstellen, wohl aber die, daß sie sich in einem Punkte schneiden. Die 3 Gleichungen

$$x_1 F_1^y + x_2 F_2^y + x_3 F_3^y = 0$$
$$x_1 \Phi_1^y + x_2 \Phi_2^y + x_3 \Phi_3^y = 0$$
$$x_1 \Psi_1^y + x_3 \Psi_2^y + x_3 \Psi_3^y = 0$$

zeigen sofort, daß die Bedingung hierfür $\mathsf{J} = 0$ ist, d. h. der Ort solcher Pole ist die JAKOBIsche Kurve. Man kann dies aber auch so auffassen, daß in diesen Punkten (y) sich drei erste Polaren schneiden.

Gehen etwa F, Φ, Ψ selbst durch einen Punkt hindurch, so geht durch diesen Punkt auch J. Denn wir können die Determinante J verändern, indem wir zu der mit x_1 multiplizierten ersten Zeile die mit x_2 resp. x_3 multiplizierte zweite und dritte Zeile addieren; dann kommt in der ersten Zeile nach dem EULERschen Theorem $l\,\mathsf{F}$, $m\,\Phi$, $n\,\Psi$, was unsere Behauptung bestätigt. Wir können nach dieser Umformung J in die Form setzen, wenn hier Z_i die betreffenden Unterdeterminanten sind

$$\mathsf{J} \cdot x_1 \equiv l\,\mathsf{F}\,\mathsf{Z}_1 + m\,\Phi\,\mathsf{Z}_2 + n\,\Psi\,\mathsf{Z}_3 \,. \tag{12}$$

Differenzieren wir diese Gleichung nach x_1, so ergibt sich

$$\begin{cases} x_1 \dfrac{\partial \mathsf{J}}{\partial x_1} + \mathsf{J} = l\,\mathsf{F}_1\,\mathsf{Z}_1 + m\,\Phi_1\,\mathsf{Z}_2 + n\,\Psi_1\,\mathsf{Z}_3 \\ \qquad\qquad + l\,\mathsf{F}\dfrac{\partial \mathsf{Z}_1}{\partial x_1} + m\,\Phi\dfrac{\partial \mathsf{Z}_2}{\partial x_1} + n\,\Psi\dfrac{\partial \mathsf{Z}_3}{\partial x_1} \,. \end{cases} \tag{13}$$

Sind nun zwei der drei Kurven, etwa F und Φ von gleicher Ordnung, ist also $l = m$, so kommt für einen gemeinschaftlichen Punkt der drei Kurven, für den also $\mathsf{F} = 0$, $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ und $\mathsf{J} = 0$

$$\begin{aligned} x_1 \frac{\partial \mathsf{J}}{\partial x_1} &= m\,(\mathsf{F}_1\,\mathsf{Z}_1 + \Phi_1\,\mathsf{Z}_2 + \Psi_1\,\mathsf{Z}_3) + (n - m)\,\Psi_1\,\mathsf{Z}_3 \\ &= m\,\mathsf{J} + (n - m)\,\Psi_1\,\mathsf{Z}_3 \,, \end{aligned}$$

also schließlich

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathsf{J}}{\partial x_1} = \dfrac{(n - m)\,\mathsf{Z}_3}{x_1} \cdot \Psi_1 \,, \quad \text{und ähnlich} \\ \dfrac{\partial \mathsf{J}}{\partial x_2} = \dfrac{(n - m)\,\mathsf{Z}_3}{x_1} \cdot \Psi_2 \,, \quad \text{sowie} \\ \dfrac{\partial \mathsf{J}}{\partial x_3} = \dfrac{(n - m)\,\mathsf{Z}_3}{x_1} \cdot \Psi_3 \,. \end{cases} \tag{14}$$

Daraus folgt, daß in diesem Punkte J und Ψ dieselbe Tangente haben; denn es ist

$$z_1 \frac{\partial \mathsf{J}}{\partial x_1} + z_2 \frac{\partial \mathsf{J}}{\partial x_2} + z_3 \frac{\partial \mathsf{J}}{\partial x_3} \equiv \frac{(n - m)\,\mathsf{Z}_3}{x_1} \left\{ z_1\,\Psi_1 + z_2\,\Psi_2 + z_3\,\Psi_3 \right\},$$

wo nun die z_i laufende Koordinaten sein mögen. Mit kurzen Worten:

Gehen zwei Kurven m^{ter} Ordnung (F *und* Φ) *und eine Kurve n^{ter} Ordnung* (Ψ) *durch einen Punkt P, so geht auch die Jakobische Kurve* J *durch denselben Punkt P und wird in ihm von Ψ berührt.*

Ist nun aber vollends $l = m = n$, so folgt aus (14), daß alle $\frac{\partial \mathsf{J}}{\partial x_i}$ in dem gemeinsamen Punkt gleich 0 sind, folglich:

Gehen drei Kurven derselben Ordnung durch einen Punkt P, so hat die Jakobische Kurve in P einen Doppelpunkt.

153. Im folgenden sollen nun immer F, Φ, Ψ dieselbe Ordnung n haben. Dann kann man sie (wie beim Büschel) durch lineare Parameter zu einem System von unendlich vielen Kurven, in diesem Falle zu einer ∞^2-fachen Mannigfaltigkeit verbinden, die man »Netz« nennt:

$$\mathsf{F} + \lambda \Phi + \mu \Psi = 0 . \tag{15}$$

Alles was wir oben für 3 Kurven verschiedener Ordnung behaupteten, gilt selbstverständlich auch hier; aber nicht bloß das, die obigen Sätze gelten für jede der ∞^2 Kurven des Netzes. Denn die JACOBIsche Determinante ändert sich nur um den Faktor

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \mu \\ 1 & \lambda' & \mu' \\ 1 & \lambda'' & \mu'' \end{vmatrix},$$

wenn man in sie statt F, Φ, Ψ drei beliebige Kurven von (15) mit den Parametern $\lambda|\mu$, $\lambda'|\mu'$, $\lambda''|\mu''$ einführt. Wir können das in folgenden Sätzen zusammenfassen:

Die Jakobische Kurve (von der Ordnung $3(n-1)$) ist der Ort für alle Pole (y), deren gerade Polaren in bezug auf sämtliche Kurven des Netzes sich in demselben Punkte (z) schneiden. Durch jeden Punkt (y) gehen sämtliche ersten Polaren, deren Pol (z) ist.

Die Jakobische Kurve ist auch der Ort für alle Doppelpunkte von Netzkurven.

Haben die Kurven des Netzes einen gemeinsamen Grundpunkt, so hat in diesem die Jakobische Kurve einen Doppelpunkt.

154. Von dem System der ∞^2 Individuen eines Netzes macht man sich schon eine bessere Vorstellung, wenn man bedenkt, daß durch jeden Punkt (y) der Ebene ein Büschel geht. Denn wenn die beiden Gleichungen bestehen

$$F^x + \lambda \Phi^x + \mu \Psi^x = 0$$

und

$$F^y + \lambda \Phi^y + \mu \Psi^y = 0 ,$$

so kann man einen Parameter, z. B. μ, eliminieren und erhält die Gleichung eines Büschels

$$(F^x \Psi^y - F^y \Psi^x) + \lambda(\Phi^x \Psi^y - \Phi^y \Psi^x) = 0 .$$

Man bekommt also z. B. ein Netz, wenn man für eine n-ik $\frac{1}{2} n(n+3) - 2$ feste Punkte gibt. Allerdings ist dieses Netz ein sehr spezielles; denn die Basispunkte der ∞^1 Büschel des Netzes sind hier bis auf einen alle fest. Das schon vielfach benutzte Kegelschnittnetz durch drei Grundpunkte ist ein Beispiel hierfür. J wird hier einfach durch die drei Verbindungslinien der Grundpunkte gebildet. Dies bestätigt man analytisch, sieht es aber auch ohne weiteres ein, da J durch eine C_3 mit Doppelpunkten in den drei Grundpunkten repräsentiert werden muß.

Wir haben auch schon darauf hingewiesen, daß das System der ersten Polaren einer Kurve ein spezielles Netz ist (Nr. 117). Die Jakobische Kurve des Netzes ist dann die Hessesche Kurve der Grundkurve und wir könnten ohne große Mühe alle Untersuchungen des Abschnittes III auf allgemeine Netze übertragen. Es muß jedoch hier genügen, wenn wir folgende Sätze aufstellen:

Der Ort der Pole (z) in bezug auf die Kurven eines Netzes n^{ter} Ordnung, deren erste Polaren einen Punkt (y) gemein haben, ist eine Kurve der Ordnung $3(n-1)^2$, die sog. Steinersche Kurve des Netzes. Durch jeden Punkt (z) geht ein Büschel von Geraden, deren Pol (y) ist.

Die Verbindungslinie entsprechender Punkte (y) und (z) der Jakobischen und Steinerschen Kurve umhüllt eine Kurve der Klasse $3n(n-1)$, die sog. Cayleysche Kurve des Netzes.

Bezüglich weiterer Sätze über Büschel und Netze, die sich hier leicht anschließen würden, müssen wir auf CREMONA verweisen.

Es ist aber noch ein Wort zu sagen über lineare Systeme überhaupt. Alle unsere Sätze über dieselben hatten einen projektiven Charakter, d. h. sie bleiben gültig bei linearer Transformation der Variablen. Die JAKOBIsche Kurve ist ja selbstverständlich eine Kovariante des Netzes. Wir sahen aber (Nr. 93 u. ff.), daß lineare Systeme höherer Stufe besonders auftreten in Untersuchungen über Punktgruppen, die einen rational-invarianten Charakter haben, d. h. bei jeder rationalen Transformation ihre Gültigkeit behalten. Wir müssen uns begnügen darauf hinzuweisen, daß seit noch nicht 20 Jahren die Untersuchungen mehrerer, besonders italienischer Mathematiker sich in dieser Richtung mit linearen Kurvensystemen beschäftigen[111]) und wollen im folgenden nur noch einige Beispiele für Netze und deren JAKOBIsche Kurve geben.

§ 82. **Beispiele von Kurvennetzen.**

155. Wir haben schon im Abschnitt XII an verschiedenen Stellen darauf hingewiesen, daß jede Kubik als JAKOBIsche Kurve eines ganz allgemeinen Kegelschnittnetzes betrachtet werden kann. Unsere folgenden Beispiele sollen speziellere Kegelschnittnetze behandeln, deren JAKOBIsche Kurve zerfällt.

Beisp. 1. Wird ein Kegelschnitt auf ein Polardreieck bezogen, so kann seine Gleichung auf die Form gebracht werden

$$(16) \qquad \mathsf{K} \equiv \varkappa x_1^2 + \lambda x_2^2 + \mu x_3^2 = 0 .$$

Denn die Ecken sind paarweise konjugiert in bezug auf den Kegelschnitt, wie man sich durch Einsetzen von $x_1 = 0$ usw. überzeugt. Alle Kegelschnitte mit gemeinschaftlichem Polardreieck bilden ein Netz, das durch Gleichung (16) gegeben ist. Bilden

---

[111]) In der Abhandlung von G. CASTELNUOVO: *„Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane“* in Mem. R. Acc. Sc. Torino (2) **42** (1891) findet der Leser eine sehr übersichtliche Darstellung, sowie die vorhergehende Literatur.

wir J für drei Kegelschnitte K, K′, K″ mit den Parametern $\varkappa|\lambda|\mu$, $\varkappa'|\lambda'|\mu'$, $\varkappa''|\lambda''|\mu''$, so ergibt sich ohne weiteres

$$\tfrac{1}{8}\,\mathsf{J} \equiv \begin{vmatrix} \varkappa & \lambda & \mu \\ \varkappa' & \lambda' & \mu' \\ \varkappa'' & \lambda'' & \mu'' \end{vmatrix} \cdot x_1\, x_2\, x_3\,,$$

d. h. J *ist mit dem Polardreieck identisch.*

Beisp. 2. Seien $\mathsf{K}_1 = 0$, $\mathsf{K}_2 = 0$, $\mathsf{K}_3 = 0$ die Gleichungen dreier beliebigen Kreise, so ist

$$\mathsf{K}_1 + \lambda\,\mathsf{K}_2 + \mu\,\mathsf{K}_3 = 0 \tag{17}$$

die Gleichung eines allgemeinen Kreisnetzes. Da man alle Kreise der Ebene als Kegelschnitte mit zwei festen Grundpunkten (den zyklischen, imaginären Punkten) betrachten kann, so muß die Jakobische Kubik dieses spezialisierten Kegelschnittnetzes in diesen Punkten Doppelpunkte haben, also in die unendlich ferne Gerade und einen Kreis zerfallen. Sehen wir von der ersteren ab, so können wir also zunächst sagen: *Die Jakobische Kurve eines Kreisnetzes ist wieder ein Kreis.*

Ist

$$\mathsf{K}_i \equiv x^2 + y^2 - 2\,\alpha_i\, x - 2\,\beta_i\, y + \gamma_i = 0\,, \qquad [i = 1, 2, 3] \tag{18}$$

so daß

$$r_i^2 = \alpha_i^2 + \beta_i^2 - \gamma_i\,,$$

so erhält man, von Zahlenfaktoren abgesehen:

$$\mathsf{J} \equiv \begin{vmatrix} x - \alpha_1 & y - \beta_1 & \alpha_1\, x + \beta_1\, y - \gamma_1 \\ x - \alpha_2 & y - \beta_2 & \alpha_2\, x + \beta_2\, y - \gamma_2 \\ x - \alpha_3 & y - \beta_3 & \alpha_3\, x + \beta_3\, y - \gamma_3 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Multipliziert man die letzte Kolonne dieser Determinante mit 2 so kann man wegen (18) setzen

$$\mathsf{J} \equiv \begin{vmatrix} x - \alpha_1 & y - \beta_1 & x^2 + y^2 - \gamma_1 \\ x - \alpha_2 & y - \beta_2 & x^2 + y^2 - \gamma_2 \\ x - \alpha_3 & y - \beta_3 & x^2 + y^2 - \gamma_3 \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Diese Determinante kann ersetzt werden durch

$$\mathsf{J}^* \equiv \begin{vmatrix} 1 & x & y & x^2 + y^2 \\ 1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 1 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 1 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \tag{19*}$$

wovon man sich durch lineare Kombination der Zeilen von J^*, oder umgekehrt nach dem Verfahren von Nr. 130a überzeugt. Aus der Determinante J^* ist die Kreisgleichung in der Normalform direkt ablesbar.

In dieser Form erkennen wir aber sofort, daß dieser Kreis der Orthogonalkreis der drei gegebenen, mithin des ganzen Netzes ist. Denn habe der Orthogonalkreis die Gleichung

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0, \tag{20}$$

so sind die Bedingungen für die Orthogonalität mit den drei Kreisen K_i, wie leicht abzuleiten

$$\begin{cases} \gamma_1 - 2\alpha\alpha_1 - 2\beta\beta_1 + \gamma = 0 \\ \gamma_2 - 2\alpha\alpha_2 - 2\beta\beta_2 + \gamma = 0 \\ \gamma_3 - 2\alpha\alpha_3 - 2\beta\beta_3 + \gamma = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Durch Elimination von α, β, γ aus (20) und (21) geht aber sofort (19*) hervor. In dem Netz sind unendlich viele Nullkreise, die alle, da sie als Scheitel imaginärer Linienpaare aufzufassen sind, auch J erfüllen. Wir können demnach sagen:

Die Jakobische Kurve eines Kreisnetzes ist der zum Netz gehörige Orthogonalkreis.

Wegen weiterer Sätze sehe man etwa Simon, § 23, wo das Netz als »linearer Kreiskomplex« bezeichnet wird und α, β, γ als Koordinaten eingeführt sind.

156. Zwei Netze höherer Kurven mögen den Abschluß unserer Betrachtungen über lineare Kurvensysteme bilden.

Beisp. 1. Durch sieben Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_7$ geht ein Netz von Kubiken. In diesem Netz sind ∞^1 Kurven mit Doppelpunkt. Der Ort dieser Doppelpunkte ist die Jakobische Kurve des Netzes, eine C_6, mit den sieben Grundpunkten als Doppelpunkten.

Gibt man einen weiteren Punkt P_8, so gibt es für die sieben Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_6, P_8$ eine ebensolche Kurve C_6'. Die Kurven C_6 und C_6' schneiden sich, da sie sechs gemeinschaftliche Doppelpunkte haben, in $6 \cdot 6 - 6 \cdot 4 = 12$ Punkten. Dies sind die 12 kritischen Zentra des durch die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_8$ bestimmten Büschels.

Beisp. 2. Zum Schlusse betrachten wir noch ein Netz von rationalen Quartiken, das die drei Doppelpunkte D_1, D_2, D_3 und dazu noch drei einfache Punkte P_1, P_2, P_3 gemein hat.

Dies gibt in der Tat $3 \cdot 3 + 3 = 12$ Bedingungen, so daß das System noch zwei Freiheitsgrade hat. Die Jakobische Kurve muß von der neunten Ordnung sein; sie zerfällt aber hier. Wir bestimmen ihre Teile, indem wir Punkte suchen, in denen Kurven unseres Netzes Doppelpunkte haben müssen. Nehmen wir z. B. irgend einen Punkt Q auf $D_1 D_2$, so kann man durch Q, D_1, D_2, P_1, P_2, P_3 noch eine Kubik Λ legen, die in D_3 einen Doppelpunkt hat. Dann bildet Λ mit der Geraden $D_1 D_2$ zusammen eine Kurve des Netzes. Folglich ist $D_1 D_2$ und ebenso $D_2 D_3$, $D_3 D_1$ Bestandteil von J. Der Leser möge in ähnlicher Weise zeigen, daß der noch zu bestimmende Teil sechster Ordnung aus den drei Kegelschnitten besteht, die durch D_1, D_2, D_3 und je zwei der Punkte P_1, P_2, P_3 gehen.

§ 83. Nichtlineare Systeme von Kurven. Charakteristikentheorie. Probleme der Anzahl.

157. Was wir in diesem letzten kurzen Paragraphen noch geben wollen, kann nicht mehr sein als eine Andeutung der Aufgaben, deren Lösung hier in Betracht käme. Vor allem wollen wir überhaupt nur von einstufigen Systemen (oder von Systemen mit einem Freiheitsgrad) sprechen. Eine solche »Kurvenreihe« kann dann durch die Anzahl N der Individuen gekennzeichnet werden, die durch einen Punkt der Ebene gehen. N heißt nach de Jonquières[112]) der »Index« der Reihe. Dieser Index ist z. B. bei dem Tangentensystem einer n-ik $n(n-1) - 2d - 3r$, bei dem System der Kegelschnitte, die durch drei Punkte gehen und eine Gerade berühren, gleich 2.

Zwei solche Kurvenreihen n^{ter} bez. m^{ter} Ordnung, mit den Indizes N bez. M kann man ebenso wie zwei Büschel (vgl. Nr. 108), denen der Index 1 zukommt, eindeutig aufeinander beziehen. Wir fragen nach der Ordnung des Erzeugnisses der beiden Kurvenreihen, d. h. nach der Anzahl der Punkte, die die erzeugte Kurve Σ mit einer beliebigen Geraden G gemeinschaftlich hat. Nehmen wir auf G einen beliebigen Punkt A, so gehen durch diesen N Kurven n^{ter} Ordnung der ersten Reihe. Jeder von diesen entspricht

112) *„Théorèmes généraux concernant les courbes géométriques planes d'un ordre quelconque"* (Journ. math. p. appl. **6**, 1861, S. 113—134).

eine Kurve m^{ter} Ordnung der zweiten Reihe. Diese sämtlichen Kurven geben Nm Schnittpunkte A' auf G, die man als A entsprechend betrachtet. Ebenso entsprechen jedem Punkte A' Mn Punkte A. Auf G liegt also eine (Mn, Nm)-Korrespondenz vor, die nach dem CHASLESschen Korrespondenzprinzip

$$Mn + Nm$$

Koinzidenzpunkte hat. Jeder solche Koinzidenzpunkt entspricht aber einem Schnittpunkt von Σ mit G. Daher der Satz:

Zwei Kurvenreihen m^{ter} bez. n^{ter} Ordnung, mit den Indizes M bez. N, erzeugen, projektiv aufeinander bezogen, eine Kurve der Ordnung $Mn + Nm$.

Beisp. Nehmen wir als speziellen Fall die zwei Tangentensysteme zweier Kurven μ^{ter} bez. ν^{ter} Klasse, so daß $m = n = 1$ ist, so ist das Erzeugnis der Schnittpunkte entsprechender Tangenten von der $(\mu + \nu)^{\text{ten}}$ Ordnung. In dieser Form ist der Satz nur das Reziproke des schon in Nr. 35 abgeleiteten Satzes, daß die Verbindungslinie der eindeutig aufeinander bezogenen Punkte zweier Kurven der m^{ten} bez. n^{ten} Ordnung eine Kurve von der Klasse $m + n$ umhüllt. Als allerspeziellsten Fall haben wir schon dort die projektive Erzeugung der Kegelschnitte angegeben. Hier möge noch die Erzeugung der rationalen Kubik, die sich hieraus ergibt, Platz finden.

Ist

$$\mathsf{L} + \lambda \mathsf{L}' = 0$$

ein Strahlenbüschel (Punktreihe),

$$\Lambda + \lambda \Lambda' + \lambda^2 \Lambda'' = 0$$

das Tangentensystem (Punktsystem) eines Kegelschnitts (vgl. Beisp. 3 von Nr. 28), durch dasselbe λ projektiv auf das Strahlenbüschel (die Punktreihe) bezogen, so ist

$$\Lambda \mathsf{L}'^2 - \Lambda' \mathsf{L}' \mathsf{L} + \Lambda'' \mathsf{L}^2 = 0$$

die durch die gemeinsamen Schnittpunkte (Verbindungslinien) erzeugte Kurve dritter Ordnung (dritter Klasse), die das Zentrum des Büschels (den Träger der Punktreihe) als Doppelpunkt (Doppeltangente) hat (vgl. Nr. 22, Beisp. 2).

158. Die Theorie der Kurvenreihen wurde wesentlich vervollkommnet, als CHASLES[113]) zur Charakterisierung noch eine zweite Zahl einführte, die Anzahl N' der Kurven nämlich, die eine gegebene Gerade berühren. N, N' heißen dann die »Charakteristiken« des Systems. Dieses selbst soll mit $\mathfrak{S}(N, N')$ bezeichnet werden. Die Einführung von N' erscheint unserer dualistisch geschulten Denkweise sehr natürlich. Sie wurde besonders dadurch fruchtbar, daß CHASLES zu gleicher Zeit (auf experimentellem Wege) den Satz fand, daß die Anzahl der Kegelschnitte eines einstufigen Systems $\mathfrak{S}(N, N')$, die irgend eine Bedingung $\mathfrak{T}$ erfüllen, durch die Charakteristiken N, N' linear in der Form

$$\alpha N + \beta N'$$

ausgedrückt werden kann, wo α, β von N und N' ganz unabhängig sind und als Charakteristiken der Bedingung $\mathfrak{T}$ angesehen werden können.

Dieser allgemeine Satz wurde in der Folge von CLEBSCH[114]), HALPHEN[115]) u. a. bewiesen und das Charakteristikenproblem auch auf höhere Kurven ausgedehnt.

Beisp. Ohne den Satz in seiner Allgemeinheit an dieser Stelle beweisen zu wollen, geben wir von ihm eine Anwendung, die seine Fruchtbarkeit ins hellste Licht setzen wird. Für die hier benützte Spezialisierung soll aber der Beweis noch in der nächsten Nummer erbracht werden. Wir wollen auch gleich das Endziel unserer Betrachtung angeben, d. i. *die Anzahl der Kegelschnitte zu bestimmen, die fünf gegebene Kegelschnitte berühren.* Die Folge der Untersuchung wird zugleich die Anzahlen der Lösungen für alle Unterfälle dieses allgemeinen Taktionsproblems ergeben.

Benützen wir nur Punkte und Gerade zur Bestimmung eines Kegelschnitts, so gibt es in einer leicht verständlichen Bezeich-

---

[113]) C. R. Ac. Sc. Paris **58** (1864) u. ff.

[114]) Math. Ann. **6**, 1873, S. 1ff.

[115]) Bull. Soc. math. France **1**, 1873, S. 130—141. — Von großer Wichtigkeit sind auch die Arbeiten HALPHENS in C. R. Ac. Sc. Paris **83** (1876), Proc. Lond. Math. Soc. **9** (1878), Math. Ann. **14** (1878) und im Journ. Éc. Polyt. **45** (1879).

Wir dürfen hier auch nicht versäumen, auf den ersten Teil der schon in Fußnote 64 (S. 174) zitierten zusammenfassenden Arbeit von CAYLEY hinzuweisen, der a. a. O. auf S. 75—144 enthalten ist.

nungsweise folgende Bestimmungsmöglichkeiten, denen die Anzahl der Lösungen (vgl. das Beisp. v. Nr. 147) untergeschrieben ist:

$$\begin{array}{cccccc} (:\cdot:), & (:\ :/), & (.\dot{}\,.//), & (:///), & (\cdot////), & (/////). \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 2 & 1 \end{array}$$

Daraus entspringen, wenn wir überall einen Punkt weglassen, folgende 5 Systeme, mit den daruntergesetzten Charakteristiken:

$$\begin{array}{ccccc} (:\ :), & (.\dot{}\,./), & (://), & (\cdot///), & (////). \\ 1,2 & 2,4 & 4,4 & 4,2 & 2,1 \end{array}$$

Wir wollen nun zunächst in dem ersten System (Büschel) $\mathfrak{S}(1, 2)$ den weggelassenen Punkt durch einen Kegelschnitt K ersetzen. Nach dem obigen Satze muß es dann

$$1 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta$$

Lösungen geben, d. h. Kurven des Büschels, die den Kegelschnitt K berühren und α, β sind, wenn einmal für den speziellen Fall des Büschels bestimmt, für jedes andere Kegelschnittsystem $\mathfrak{S}(N, N')$ die Charakteristiken für die Berührung eines gegebenen Kegelschnitts.

Nun wissen wir aus Nr. 150c), daß für unseren Fall

$$\alpha + 2\beta = 6.$$

Da wir aber die Nr. 150 auch ins Dualistische umwerten können, muß dieselbe Zahl 6 auch für das letzte System (Schar) $\mathfrak{S}(2, 1)$ resultieren und man hat daher auch die Gleichung

$$2\alpha + \beta = 6.$$

Demnach ergibt sich $\alpha = \beta = 2$ und die Systeme $\mathfrak{S}(2, 4)$, $\mathfrak{S}(4, 4)$ und $\mathfrak{S}(4, 2)$ enthalten bezüglich 12, 16 und 12 Kegelschnitte, die den Kegelschnitt K berühren.

So können wir nun weiterfahren, indem wir den Kegelschnitt K unter die gegebenen Stücke rechnen, aber dafür einen Punkt weglassen, die Charakteristiken der Systeme aufstellen und dann einen zweiten Kegelschnitt K' geben. Die Anzahl der Lösungen bestimmt sich dann immer durch die Formel

$$2(N + N').$$

Dies können wir in folgendes Schema bringen[116]):

[116]) Nach B. Sporer: *„Zur Ableitung allgemeiner Eigenschaften algebraischer Kurven."* Progr. Gymn. Ehingen 1898/99, S. 40.

S gegeben durch			Charakteristiken		Bestimmungsstücke			Anzahl der Lösungen
Punkte	Gerade	Kegelschnitte	N	N'	Punkte	Gerade	Kegelschnitte	
4	0	0	1	2	4	0	1	6
3	1	0	2	4	3	1	1	12
2	2	0	4	4	2	2	1	16
1	3	0	4	2	1	3	1	12
0	4	0	2	1	0	4	1	6
3	0	1	6	12	3	0	2	36
2	1	1	12	16	2	1	2	56
1	2	1	16	12	1	2	2	56
0	3	1	12	6	0	3	2	36
2	0	2	36	56	2	0	3	184
1	1	2	56	56	1	1	3	224
0	2	2	56	36	0	2	3	184
1	0	3	184	224	1	0	4	816
0	1	3	224	184	0	1	4	816
0	0	4	816	816	0	0	5	3264

Es gibt also 3264 Kegelschnitte, die gegebene 5 Kegelschnitte berühren[117]).

159. Die Untersuchungen dieses Abschnittes, besonders der vorhergehenden Nummer, waren vielfach nicht direkt auf die Lösung des Problems gerichtet, sondern zielten nur darauf ab, anzugeben, wieviel Lösungen ein Problem besitzt. Es würde ja auch ganz ungeheuerlich erscheinen, etwa das Beispiel der vorigen Nummer algebraisch oder geometrisch lösen zu wollen. Alle Untersuchungen dieser Art faßt man unter dem Begriff »Abzählende Geometrie« oder »Geometrie der Anzahl« zusammen. Die abzählende Geometrie benutzt

---

[117]) Steiner gab diese Zahl ursprünglich unrichtig zu $6^5 = 7776$ an (*Gesammelte Werke*, Bd. 2, S. 417). Die richtige Zahl gab Chasles[113]).

zur Erlangung ihrer Resultate vorzugsweise die Korrespondenzformeln, die Theorie der Charakteristiken und ein Prinzip, das von SCHUBERT formuliert wurde, das sog. »Prinzip von der Erhaltung der Anzahl«[118]).

Dieses Prinzip wird angewendet, indem man die gegebenen geometrischen Gebilde selbst oder ihre gegenseitige Lage so spezialisiert, daß die Anzahl der Lösungen leichter erkennbar wird und das Prinzip behauptet gerade, daß durch derartige Spezialisierungen die Anzahl der Lösungen nicht verändert werde.

Es ist in neuerer Zeit von G. KOHN[119]) und E. STUDY[120]) — von letzterem in besonders harter Form — festgestellt worden, daß das Prinzip jene fundamentale Bedeutung, die ihm sein Autor und viele andere lange Zeit zuschrieben, nicht hat, daß es ungenau und nicht auf alle Fälle anwendbar ist. Aber der erstere gibt selbst zu, daß das Prinzip von der Erhaltung der Anzahl, wenn auch nicht als allgemeingültiger Fundamentalsatz, so doch „als heuristisches Prinzip von allzeit frischer Kraft“ in der Wissenschaft fortleben wird.

In diesem Sinne wollen wir für seine Anwendung wenigstens ein Beispiel anführen.

Beisp. Wir fragen, wieviel Individuen es in einer Kurvenreihe $\mathfrak{S}(N, N')$ gibt, die eine gegebene $C_n^{n'}$ berühren.

Um diese Anzahl festzustellen, denken wir uns die C_n zerfallen in n Gerade durch einen Punkt P. Soll man dann überhaupt noch von einer Klasse sprechen können und diese gleich n' sein, so müssen wir den Schnittpunkt P der n Geraden ν-fach zählen[121]). Wir fragen nun, wieviel Kurven des Systems diese zerfallene $C_n^{n'}$ berühren.

Dies sind 1) alle Kurven, welche eine der n Geraden berühren, das gibt im ganzen nN'; 2) alle Kurven die durch P gehen, aber jede n'-mal gezählt, da in P n' Punkte (Strahlbüschel) vereinigt liegen, das gibt $n'N$. Wir können also sagen:

---

[118]) S. SCHUBERTS *Kalkül der abzählenden Geometrie*, Leipzig (Teubner) 1879, 348 S. 8°, § 4.

[119]) Arch. Math. Phys. (3) **4**, 1903.

[120]) Verh. III. Intern. Math.-Kongr. 1904 (Teubner 1905), S. 388 ff.

[121]) Am Linienpaar ergibt dies die Transformation selbst. $xy = 0$ gibt zu Linienkoordinaten transformiert $u_3^2 = 0$.

In einer Kurvenreihe $\mathfrak{S}(N, N')$ *gibt es*

$$nN' + n'N$$

Individuen, die eine gegebene Kurve n^{ter} *Ordnung* n'^{ter} *Klasse berühren.*

Spezielle Fälle. 1. Ein Büschel n^{ter} Ordnung hat die Charakteristiken $N = 1$, $N' = 2(n-1)$, welch letztere Zahl leicht direkt abgeleitet werden kann. Setzt man statt n m, statt n' $m(m-1)$ in die obige Formel, so erhält man die in Nr. 150 gefundene Zahl $m(2n + m - 3)$. — **2.** Ist die gegebene $C_n^{n'}$ ein Kegelschnitt, so erhält man die Zahl

$$2(N + N'),$$

die wir in der vorigen Nummer benutzten.

SACH-INDEX.

Die beigesetzten Zahlen bedeuten die Seiten des Buches. Ist die Zahl kursiv, so kommt der betr. Gegenstand auf der angegebenen Seite in einer Fußnote vor. Autorennamen sind nur dann aufgenommen, wenn der Name in Verbindung mit einem Satz, einer Kurve oder dergleichen gebraucht wird.

Berichtigungen.

S. 27, Zeile 6/7 v. u., lies statt: berühren sich — haben ... dieselbe Tangente. Dies involviert nur, daß zwei der k Zweige, die vorher eine Schleife bildeten, nun zu einer Spitze zusammentreten. Von einem Berührungsknoten ist hier natürlich keine Rede. Die Figuren, die CHR. WIENER in seinem *Lehrbuch der darst. Geom.* I. Bd. (1884) in Nr. 247 [Fig. 124, 2) u. 3)] gibt, sind daher keineswegs typisch, sondern stellen höhere Singularitäten dar.

S. 38, Zeile 6 v. u. lies statt: Wendetangente — Doppeltangente.

S. 143, Zeile 6 u. 10 v. o., setze statt der beiden „+“ „—“-Zeichen.

S. 225, Zeile 10 v. u., lies statt: Netz — allgemeines Netz.

S. 269, Überschrift des § 74, lies statt: Gleichungsformen — Gleichungsform.



...ig.

P... ...ert:

Sa... ...Fragen
...en Auf-
...hmetik,

...M. 1.80,

...M. 1.80,

Au... ...M. 1.—.

Au... ...l- und
...g von
...fgaben.
...).

Sy... ...n für den
..., geb. M. 2.—.

... und algebraischen
Fr... ...em systematischen Auf-
ba... ...er Arithmetik“ eignet sich
ha... ...erste und zweite Heft der
„A... ...d Algebra für Realschulen“ ist
für ... ...tgenanntes Werk enthält keinerlei theoretische Begründungen, sondern lediglich **Aufgaben,** natürlich angepaßt an den Lehrgang des Verfassers, aber doch, ihrem Inhalt nach, mehr für Realschüler als für Gymnasiasten geeignet.

G. J. Göschen'sc ... ipzig.

Mathematische Mußestunden.

Eine Sammlung
von
Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur
von
Dr. Hermann Schubert,
Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums zu Hamburg.

Große Ausgabe in 3 Bdn. gebunden à M. 4.—.
Kleine Ausgabe gebunden M. 5.—.

Wie schon der Titel sagt, handelt es sich hier um kein streng wissenschaftliches Werk, sondern um ein Buch, in dem der Verfasser allerhand Gedanken über Dinge niedergelegt hat, die mit der Mathematik in Berührung stehen und mit denen sich jeder Gebildete oft und gern in seinen Mußestunden beschäftigt. Es sind ungezwungene, kritisch-historische Betrachtungen und unterhaltende Plaudereien über alle möglichen Probleme und Kunststücke, die in einer auch dem Laien leicht faßlichen Form vorgeführt, erklärt und ergänzt werden.

Zwölf Geduldspiele für Nicht-Mathematiker

zum Zwecke der Unterhaltung historisch und kritisch beleuchtet
von
Dr. Hermann Schubert,
Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums zu Hamburg.

Originell kartoniert M. 2.—.

Neue Ausgabe.

In einigen dieser Spiele dürfte jeder Leser alte Bekannte wiedererkennen, die ihm arges Kopfzerbrechen gemacht haben. Kinderleicht wird indessen die Arbeit, wenn man den Weisungen des Verfassers folgt. Derselbe begnügt sich übrigens nicht mit der Schilderung der Spiele und der Enthüllung ihrer Geheimnisse, sondern erteilt zugleich sehr anziehende kulturgeschichtliche Aufschlüsse.

Der Name des Verfassers bürgt für einen gediegenen Inhalt, und somit dürften die Bücher nicht nur dem Mathematiker von Fach, sondern jedem, der sich nur einigermaßen für diese Wissenschaft interessiert, ja überhaupt jedem denkenden, gebildeten Laien manche genußreiche Stunde schaffen.

